LXVIII OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY II STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

Zadanie 1.

Samochód rajdowy o masie m porusza się po płaskiej, poziomej nawierzchni. Współczynnik tarcia jego kół o nawierzchnię wynosi f. Samochód wchodzi w zakręt z prędkością początkową v_1, a wychodzi z niego z prędkością v_2 prostopadłą do prędkości początkowej, poruszając się przy tym tak, aby pokonywanie zakrętu trwało jak najkrócej. Samochód nie ma systemu odzyskującego energię – podczas hamowania energia jest rozpraszana.

a) Jaką (co najmniej) moc musi mieć silnik tego samochodu?

b) Jaką (co najmniej) pracę wykona ten silnik w trakcie pokonywania zakrętu?

Dla $m = 1000$ kg, $f = 0{,}4$ podaj odpowiednie wartości liczbowe w następujących przypadkach:

i) $v_1 = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $v_2 = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$;

ii) $v_1 = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $v_2 = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$;

iii) $v_1 = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $v_2 = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Przyspieszenie grawitacyjne jest równe $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$.

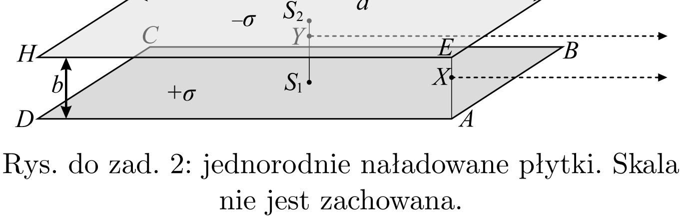
Możesz przyjąć, że samochód ma skrętne i napędzane wszystkie cztery koła (to jest najnowszy model!). Pomiń pracę i siły (momenty sił) potrzebne do ewentualnego obrotu samochodu wokół własnej osi oraz straty energii przy przeniesieniu napędu od silnika do kół.

Zadanie 2.

Dwie cienkie, kwadratowe płytki $ABCD$ oraz $EFGH$ o bokach długości a są naładowane ładunkami o gęstościach powierzchniowych odpowiednio $+\sigma$ oraz $-\sigma$. Płytki są od siebie odległe o b, przy czym $b \ll a$. Ich wierzchołki pokrywają się z wierzchołkami prostopadłościanu $ABCDEFGH$ – patrz rysunek. Oznaczmy przez S_1 punkt leżący w środku geometrycznym płytki $ABCD$, a przez S_2 punkt leżący w środku geometrycznym płytki $EFGH$.

a) W punkcie Y leżącym na odcinku S_1S_2 w odległości y od punktu S_1 (tzn. $\left|\overline{S_1Y}\right| = y$) znajduje się nieskończenie małe ciało o ładunku q. Wyznacz pracę potrzebną do oddalenia tego ciała na nieskończoną odległość od prostopadłościanu wzdłuż półprostej równoległej do boku AD (patrz rysunek).

b) W punkcie X leżącym na odcinku AE w odległości x od punktu A (tzn. $\left|\overline{AX}\right| = x$) znajduje się nieskończenie małe ciało o ładunku q. Wyznacz pracę potrzebną do oddalenia tego ciała na nieskończoną odległość od prostopadłościanu wzdłuż półprostej równoległej do boku AD (patrz rysunek).



Rys. do zad. 2: jednorodnie naładowane płytki. Skala nie jest zachowana.

Zadanie 3.

W naczyniu z cieczą wypełnioną pęcherzykami gazu można zaobserwować silną zależność wysokości dźwięku (wywołanego np. stuknięciem łyżeczką o naczynie) od ilości tych pęcherzyków. Zadanie ma na celu wyznaczenie częstotliwości dźwięku w tej sytuacji (jest to nazywane „efektem gorącej czekolady”).

W otwartym od góry naczyniu w kształcie prostopadłościanu znajduje się ciecz wypełniona równomiernie pęcherzykami gazu. Głębokość cieczy w naczyniu wynosi h, a wewnętrzne rozmiary dna to $a \times b$. Dno jest poziome. Objętość gazu stanowi ułamek α objętości cieczy wraz z gazem (czyli wynosi $\alpha \cdot hab$). Nad cieczą z pęcherzykami znajduje sie taki sam gaz jak w pęcherzykach.

Gęstość cieczy (bez gazu) wynosi ρ_{C}, jej współczynnik sprężystości objętościowej jest równy K_{C}. Gęstość gazu w pęcherzykach oraz jego współczynnik sprężystości objętościowej wynoszą odpowiednio ρ_{G} oraz K_{G}.

Współczynnik sprężystości objętościowej jest zdefiniowany jako $-V\delta p/\delta V$, gdzie δp jest zmianą ciśnienia spowodowaną małą względną zmianą objętości $\delta V/V$. Ścianki naczynia są sztywne, a rozmiary pęcherzyków znacznie mniejsze od h, a oraz b.

Wyznacz najmniejszą częstotliwość fali stojącej, jaka może powstać w rozważanej cieczy z gazem.

Przyjmij, że gęstość cieczy wraz z bąbelkami gazu jest znacznie większa od gęstości tego gazu.

Wskazówka: Prędkość dźwięku w ośrodku o współczynniku sprężystości objętościowej K i gęstości ρ jest równa $v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$

Uwaga: Pęcherzyki gazu oczywiście unoszą się do góry, jednak zakładamy, że możemy pominąć ten ruch oraz (w danym przedziale czasu) ewentualne zmiany ilości gazu wewnątrz cieczy. Pomiń również ciśnienie hydrostatyczne cieczy oraz napięcie powierzchniowe.

Rozwiązanie zadania 1.

Przyspieszenie pojazdu powinno być skierowane zgodnie z kierunkiem wektora $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ i mieć maksymalną możliwą wartość, czyli gf, tzn.

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|} gf. \tag{1}$$

Uwzględniając, że całkowity czas pokonywania zakrętu wynosi $T = |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| / (gf)$, możemy to zapisać następująco

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{T}. \tag{2}$$

Ponieważ przyspieszenie jest stałe, prędkość pojazdu w zależności od czasu t jest dana wzorem

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)\frac{t}{T} = \vec{v}_1 + \Delta\vec{v}\tau, \tag{3}$$

gdzie $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, a $\tau = t/T$. W trakcie rozważanej zmiany prędkości τ zmienia się od 0 do 1.

Moc wypadkowej siły działającej na ciało jest równa

$$P = m\vec{a} \cdot \vec{v} = \tag{4}$$

$$= \frac{m}{T}\Delta\vec{v} \cdot (\vec{v}_1 + \Delta\vec{v}\tau) = \tag{5}$$

$$= \frac{m}{T}\left[\left(v_1^2 + v_2^2\right)\tau - v_1^2\right], \tag{6}$$

przy czym w ostatnim wzorze wykorzystaliśmy, że $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$.

W chwili początkowej ta moc jest równa

$$P_1 = \frac{m}{T}\Delta\vec{v} \cdot \vec{v}_1 = \frac{m}{T}\left(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 - v_1^2\right) = -\frac{m}{T}v_1^2, \tag{7}$$

a w chwili końcowej jest równa

$$P_2 = \frac{m}{T}\Delta\vec{v} \cdot \vec{v}_2 = \frac{m}{T}\left(v_2^2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2\right) = \frac{m}{T}v_2^2. \tag{8}$$

Zauważmy, że

$$P_2 \geqslant P_1, \tag{9}$$

(Jest to prawdą nawet wtedy, gdy $\vec{v}_1$ nie jest prostopadłe do $\vec{v}_2$, gdyż $P_2 - P_1 = m\left(v_2^2 - 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + v_1^2\right)/T = m\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right)^2/T \geqslant 0$.)

Uwzględniając, że P jest liniową funkcją czasu, zależność (9) oznacza, że moc w trakcie rozważanego ruchu rośnie. Zatem $P_2 = mv_2^2/T$ jest maksymalną wartością P i to jest to poszukiwana moc silnika. Gdyby rzeczywista moc była mniejsza, to rozważany ruch nie byłby możliwy.

Silnik wykonuje pracę na przyspieszanie pojazdu tylko jeśli $P > 0$. Niech τ_0 będzie wartością τ dla przypadku $P = 0$, czyli dla

$$\Delta\vec{v} \cdot (\vec{v}_1 + \Delta\vec{v}\tau) = \left(v_1^2 + v_2^2\right)\tau - v_1^2 = 0. \tag{10}$$

Z powyższego

$$\tau_0 = -\frac{\Delta\vec{v} \cdot \vec{v}_1}{(\Delta\vec{v})^2} = \frac{v_1^2}{v_1^2 + v_2^2}. \tag{11}$$

Ponieważ moc, z jaką działa silnik, zmienia się liniowo od 0 do P_2 w czasie $(1 - \tau_0)T$, to wykonana praca wynosi

$$W = \frac{1}{2}(1 - \tau_0)TP_2 = \tag{12}$$

$$= \frac{m}{2}\frac{v_2^4}{v_1^2 + v_2^2}. \tag{13}$$

Zauważmy, że ta praca nie zależy od współczynnika tarcia.

Zapiszmy jeszcze wzór (8) podstawiając do niego jawną postać T. Otrzymamy

$$P_2 = mgf\frac{v_2^2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}. \tag{14}$$

Wartości liczbowe wynoszą:
i) $W = 1{,}6 \cdot 10^2$ kJ, $P = 70$ kW;
ii) $W = 1{,}0 \cdot 10^2$ kJ, $P = 55$ kW;
iii) $W = 10$ kJ, $P = 18$ kW.

Punktacja zadania 1.
Przyspieszenie samochodu w trakcie pokonywania zakrętu (wzór (1) lub równoważny) – 1 pkt.
Chwilowa moc potrzebna do uzyskania zadanego ruchu samochodu (wzór (6) lub równoważny) – 1 pkt.
Zauważenie, że do wyznaczenia szukanej pracy powinniśmy rozważać tylko sytuację, gdy moc jest nieujemna (lub dodatnia) – 1 pkt.
Wyznaczenie chwili, gdy moc jest równa 0 (wzór (11) lub równoważny) – 1 pkt.
Końcowy wzór na pracę (wzór (13) lub równoważny) – 2 pkt.
Niezbędna moc silnika (wzór (14) lub równoważny) – 2 pkt.
Poprawne wartości liczbowe we wszystkich przypadkach – 2 pkt (1 pkt w przypadku od 3 do 5 poprawnych wartości spośród wszystkich sześciu)

Rozwiązanie zadania 2.

Ponieważ $b \ll a$, pole elektryczne na odcinku S_1S_2 jest takie jak pole wewnątrz (z daleka od brzegów) kondensatora płaskiego o powierzchni okładek a^2, odległości miedzy nimi b, naładowanego ładunkiem σa^2 Korzystając z definicji pojemności kondensatora $C = Q/U$ oraz ze wzoru na pojemność kondensatora płaskiego $C = \epsilon_0 S/d$, otrzymamy $U/d = Q/(\epsilon_0 S) = \sigma/\epsilon_0$ (Q jest ładunkiem, U – napięciem miedzy okładkami, S – powierzchnią okładek, d – odległością miedzy nimi). Uwzględniając fakt, że we wnętrzu (z daleka od brzegów) kondensatora płaskiego pole elektryczne jest jednorodne i prostopadłe do okładek, natężenie pole elektrycznego na odcinku S_1S_2 jest równe

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \tag{15}$$

To pole jest skierowane prostopadle do płytek, od płytki o dodatnim ładunku do płytki o ujemnym ładunku (czyli dla dodatnich σ ma zwrot zgodnym z wektorem $\overrightarrow{S_1S_2}$).

Zauważmy, że praca potrzebna do oddalenia rozpatrywanego ładunku od płytek w nieskończoność nie zależy od tego, jaką drogą to zrobimy i jakie będzie to nieskończenie odległe położenie ładunku. Zamiast drogi podanej w treści zadania, wybierzmy zatem następującą, składająca się z dwóch części:

i) przesuwamy ciało prostopadle do płytek, tak by znalazło się w połowie odległości miedzy nimi;

ii) oddalamy ciało do nieskończoności tak, by pozostawało w płaszczyźnie równo odległej od obu płytek (np. wzdłuż półprostej równoległej do podanej w treści zadania).

Praca w przypadku i) wynosi $q\,(x - b/2)\,\sigma/\epsilon_0$. Ponieważ w przypadku b) rozważana płaszczyzna jest równo odległa od obu płytek, równoległa do płytek składowa pola elektrycznego jest na tej płaszczyźnie równa zero, a zatem na ładunek nie działa siła styczna do toru. Zatem na drodze i) wykonana praca jest równa 0.

Podsumowując, w przypadku a) szukana praca jest równa

$$W_\mathrm{a} = \frac{q\sigma}{\epsilon_0}\left(x - \frac{b}{2}\right). \tag{16}$$

b) Ponieważ odcinek AE nie znajduje się z dala od brzegu układu, pole elektryczne na tym odcinku nie jest dane wzorem (15).

Rozważmy układ 4 zestawów płytek identycznych jak $ABCD$ i $EFGH$ (pierwotny zestaw + trzy dodatkowe) połączonych tak, że tworzą jedną większą kwadratową płytkę o boku $2a$ o ładunku powierzchniowym $+\sigma$ i środku geometrycznym w punkcie A oraz jedną większą kwadratową płytkę o boku $2a$ o ładunku powierzchniowym $-\sigma$ i środku geometrycznym w punkcie E.

Z rozważań analogicznych jak w punkcie a) wynika, że w tej nowej sytuacji natężenie pola elektrycznego na odcinku AE jest dane wzorem (15). To pole jest sumą pól pochodzących od każdego z zestawu z osobna, przy czym z symetrii wynika, że składowa wzdłuż AE pola elektrycznego od każdego z zestawów jest taka sama, zatem od jednego tylko zestawu, w szczególności od zestawu pierwotnego jest równa

$$E_{\mathrm{b}\|} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}. \tag{17}$$

Nie jesteśmy w stanie wyznaczyć w ten sposób pochodzącej od pojedynczego zestawu składowej równoległej do okładek, gdyż suma takich składowych pochodząca od wszystkich zestawów płytek jest równa 0.

Dalej rozważamy tylko pierwotny zestaw płytek $ABCD$ i $EFGH$.

Aby wyznaczyć pracę potrzebną na oddalenie ciała o ładunku q z punktu Y do nieskończoności, możemy postąpić tak jak w przypadku a):

i) przesuwamy ciało wzdłuż $\overline{AE}$ od punktu Y do punktu w połowie odległości miedzy płytkami; wykonana praca jest równa $qE_{\mathrm{b}\|}\,(y - b/2) = q\,(y - b/2)\,\sigma/\left(4\epsilon_0\right)$;

ii) oddalamy ciało do nieskończoności tak, by pozostawało w płaszczyźnie równo odległej od obu płytek (np. wzdłuż półprostej równoległej do podanej w treści zadania); z analogicznych powodów jak w przypadku a) (ze względu na symetrię, pole elektryczne jest w połowie odległości od płytek prostopadłe do nich) praca wykonana w tym przypadku jest równa 0.

Uwzględniając, że praca wykonana na oddalenie ciała do nieskończoności nie zależy od drogi, otrzymamy, że praca wykonana w przypadku b) wynosi

$$W_\mathrm{b} = \frac{q\sigma}{4\epsilon_0}\left(y - \frac{b}{2}\right). \tag{18}$$

Zarówno W_{a} jak i W_{b} mogą być dodatnie lub ujemne. Wyprowadzone wzory obowiązują tylko gdy $0 \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant b$ (i zgodnie z treścią zadania te warunki są spełnione).

Uwaga: zauważmy, że rozważany układ płytek nie jest kondensatorem (choć z daleka od brzegów pole elektryczne pomiędzy nimi jest takie jak pole wewnątrz kondensatora płaskiego) – różnica potencjałów elektrycznych między płytkami w pobliżu brzegów jest inna niż z dala od nich.

Punktacja zadania 2.

Natężenie pola elektrycznego na odcinku S_1S_2 (wzór (15)) – 2 pkt.
Zauważenie i wykorzystanie faktu, że praca na oddalenie ładunku do nieskończoności nie zależy od drogi i punktu końcowego – 1 pkt.
Wybór drogi pozwalający na właściwe wyznaczenie szukanej pracy – 2 pkt.
Wynik końcowy w przypadku a) (wzór (16)) – 1 pkt.
Wartość prostopadłej do płytek składowej pola elektrycznego na odcinku AE (wzór (17)) wraz z uzasadnieniem – 3 pkt.
Wynik końcowy w przypadku b) (wzór (18)) – 1 pkt.

Rozwiązanie zadania 3.

Wyznaczymy najpierw prędkość dźwięku w cieczy z pęcherzykami.

Rozważmy część gazu o rozmiarach znacznie mniejszych od długości fali, ale znacznie większych od rozmiarów pęcherzyków. Niech objętość tej części będzie równa $V = V_{\mathrm{G}} + V_{\mathrm{C}}$, gdzie V_{G} jest łączną objętością pęcherzyków w tym fragmencie, a V_{C} – objętością samej cieczy. Mała zmiana ciśnienia δp w tej części wywoła zmianę objętości równą

$$\begin{aligned} \delta V &= \delta V_{\mathrm{G}} + \delta V_{\mathrm{C}} = && (19)\\ &= \delta p \frac{\delta V_{\mathrm{G}}}{\delta p} + \delta p \frac{\delta V_{\mathrm{C}}}{\delta p} = \\ &= \delta p V_{\mathrm{G}} \frac{\delta V_{\mathrm{G}}}{V_{\mathrm{G}} \delta p} + \delta p V_{\mathrm{C}} \frac{\delta V_{\mathrm{C}}}{V_{\mathrm{C}} \delta p} = \\ &= -\delta p V_{\mathrm{G}} \frac{1}{K_{\mathrm{G}}} - \delta p V_{\mathrm{C}} \frac{1}{K_{\mathrm{C}}} && (20)\\ &= -\delta p V \left(\frac{\alpha}{K_{\mathrm{G}}} + \frac{1-\alpha}{K_{\mathrm{C}}} \right). && (21) \end{aligned}$$

Z powyższego otrzymujemy, że dla cieczy z bąbelkami gazu efektywny współczynnik sprężystości objętościowej jest równy

$$K = -V \frac{\delta p}{\delta V} = \frac{1}{\frac{\alpha}{K_{\mathrm{G}}} + \frac{1-\alpha}{K_{\mathrm{C}}}}. \tag{22}$$

Gęstość tej cieczy z bąbelkami wynosi

$$\rho = \frac{V_{\mathrm{G}} \rho_{\mathrm{G}} + V_{\mathrm{C}} \rho_{\mathrm{C}}}{V} = \alpha \rho_{\mathrm{G}} + (1-\alpha) \rho_{\mathrm{C}}, \tag{23}$$

stąd prędkość dźwięku w tym ośrodku jest równa

$$v = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{K_{\mathrm{G}}} + \frac{1-\alpha}{K_{\mathrm{C}}} \right) \left[\alpha \rho_{\mathrm{G}} + (1-\alpha) \rho_{\mathrm{C}} \right]}}. \tag{24}$$

Uwzględniając $\rho_G \ll \rho_C$ dostaniemy

$$v = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{K_G} + \frac{1-\alpha}{K_C}\right)(1-\alpha)\rho_C}}. \tag{25}$$

Zauważmy, że ściśliwość cieczy jest znacznie mniejsza od ściśliwości gazu, zatem za wyjątkiem przypadku bardzo małych α można dokonać następnego przybliżenia

$$v = \sqrt{\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\frac{K_G}{\rho_C}}. \tag{26}$$

Powyższy wzór jest konsekwencją faktu, że ściśliwość cieczy z bąbelkami jest głównie określona przez ściśliwość gazu w bąbelkach, a gęstość – przez gęstość cieczy.

Dla fali pionowej na dnie naczynia będzie znajdował się węzeł fali stojącej, a na powierzchni cieczy (ponieważ jej gęstość jest znacznie większa od gęstości gazu) – strzałka. Zatem największa długość fali odpowiadająca pionowej fali stojącej spełnia warunek $\lambda/4 = h$, a odpowiednia częstotliwość jest równa

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{4h}. \tag{27}$$

Dla fal poziomych prostopadłych do ścian na końcach będą węzły fali stojącej, zatem największa długość fali wynosi $\frac{\lambda}{2} = a$ lub $\frac{\lambda}{2} = b$, w zależności od tego, wzdłuż której ściany zachodzą drgania. Odpowiadają temu częstotliwości

$$f = \begin{cases} \dfrac{v}{2a} & \text{dla drgań wzdłuż boku } a, \\[2ex] \dfrac{v}{2b} & \text{dla drgań wzdłuż boku } b. \end{cases} \tag{28}$$

Zatem minimalna częstotliwość fali stojącej jest w rozważanym przypadku równa

$$f = \min\left(\frac{1}{2a}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{4h}\right) \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{K_G} + \frac{1-\alpha}{K_C}\right)(1-\alpha)\rho_C}}. \tag{29}$$

Punktacja zadania 3.

Zmiana objętości cieczy z bąbelkami przy zmianie ciśnienia (wzór (21)) lub wyrażenie równoważne – 3 pkt.
Gęstość cieczy z bąbelkami (wzór (23)) – 2 pkt.
Prędkość dźwięku w cieczy z bąbelkami (wzór (24)) – 1 pkt.
Uwzględnienie, że $\rho_G \ll \rho_C$ we wzorze na prędkość fali (wzór (25)) – 1 pkt.
Najmniejsza częstotliwość pionowej fali stojącej wyrażona przez v (wzór (27)) – 1 pkt.
Najmniejsze częstotliwości poziomej fali stojącej wyrażona przez v (wzór (28) lub równoważny) – 1 pkt.
Wynik końcowy (wzór (29) lub równoważny) – 1 pkt.