

LXVII OLIMPIADA FIZYCZNA

ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAWODÓW I STOPNIA

CZEŚĆ II

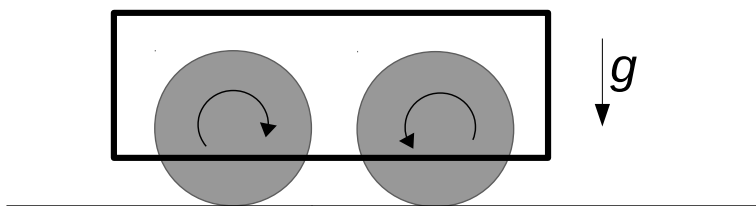
ZADANIA CZEŚCI II (termin wysyłania rozwiązań — 17 listopada 2017 r.)

ZADANIA TEORETYCZNE

Należy przesłać rozwiązania trzech (i tylko trzech) dowolnie wybranych zadań teoretycznych. Za każde z trzech zadań można otrzymać maksimum 20 punktów.

Zadanie T1.

Froterka o masie m zawiera dwie identyczne walcowe szczotki o promieniu R umieszczone symetrycznie względem środka masy froterki. Szczotki obracają się w przeciwne strony z prędkością kątową ω , a ich osie są równoległe i poziome. Współczynnik tarcia szczotek o podłoże wynosi μ .



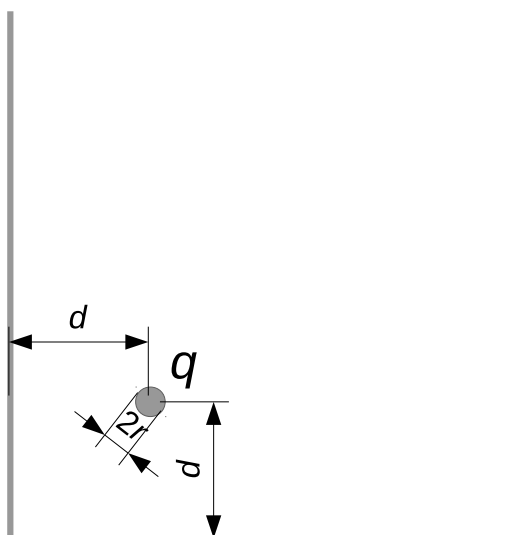
Układ znajduje się w prostopadłym do podłoża polu grawitacyjnym g .

Jaką poziomą siłą należy działać na froterkę, aby przesuwając ją ze stałą prędkością v względem podłoża:

- prostopadle do osi obrotu szczotek?
- równoległe do osi obrotu szczotek?

Zadanie T2.

Metalową kulkę o promieniu r umieszczono w narożniku między dwiema nieskończonymi metalowymi i uziemionymi płytami, stykającymi się krawędziami – patrz rysunek. Kąt między płytami wynosi 90° , a odległość kulki od każdej z płyt jest równa d , przy czym $d \gg r$. Kulka jest naładowana takim ładunkiem, że napięcie między kulką a płytami wynosi U .

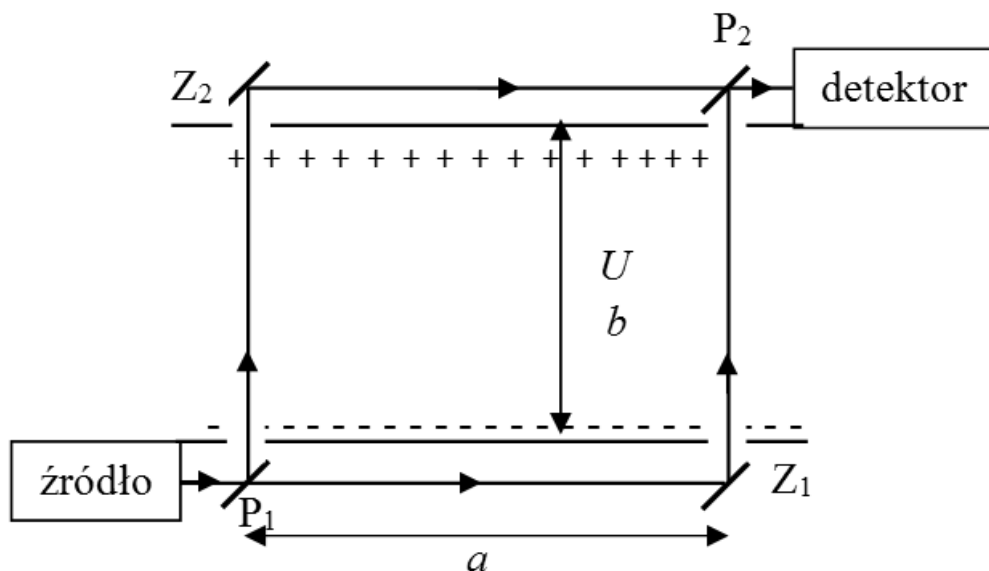


Wyznacz siłę działającą na kulkę.

Wskazówka 1: Gdy w odległości d od pojedynczej, nieskończonej, uziemionej płyty metalowej znajduje się ładunek punktowy q , to na tej płycie indukuje się ładunek elektryczny. W półprzestrzeni w której znajduje się ładunek q , pole elektryczne wyindukowanego ładunku jest takie, jakby pochodziło od punktowego ładunku $-q$ położonego symetrycznie do ładunku q względem płyty (jest to tzw. „ładunek obrazowy”), gdyż tylko w takiej sytuacji potencjał płyty jest równy 0.

Wskazówka 2: patrz logo Olimpiady Fizycznej.

Zadanie T3.



Na rysunku przedstawiono schemat interferometru, w którym wiązka nierelatywistycznych elektronów o energii kinetycznej E pada na płytkę półprzepuszczalną P_1 , skąd część wiązki biegnie dalej drogą $P_1-Z_1-P_2$, a część – drogą $P_1-Z_2-P_2$. Za płytką półprzepuszczalną P_2 (identyczną z P_1) rozdzielone wiązki nakładają się, a obraz interferencyjny jest rejestrowany przez detektor. W części obszaru od płytek P_1, Z_1 , do płytek Z_2, P_2 występuje stałe pole elektryczne,

równoległe do dróg od P_1 do Z_2 oraz Z_1 do P_2 , w wyniku czego na tych drogach energia kinetyczna elektronów zmienia się. Napięcie między obszarem Z_2 – P_2 –detektor a obszarem źródło– P_1 – Z_1 wynosi U i jest nieujemne. Długości odcinków P_1 – Z_1 oraz odcinków Z_2 – P_2 są takie same i wynoszą a . Długości odcinków P_1 – Z_2 oraz Z_1 – P_2 są takie same, a droga każdej z wiązek w polu elektrycznym wynosi b .

Dla jakiej najmniejszej wartości $U > 0$ natężenie wiązki rejestrowane przez detektor jest równe 0 ?

Wiązkę elektronów potraktuj jako falę de Broglie'a. Płytki półprzepuszczalne rozdzielają tę falę.

Ładunek elektronu oznacz przez $-e$, jego masę przez m . Stała Plancka to h .

Zadanie T4 – numeryczne.

Punktowe ciało o masie m oraz o ładunku q porusza się w płaszczyźnie x - y w stałym polu magnetycznym, które w tej płaszczyźnie ma kierunek osi z , a jego wartość zależy od współrzędnej y zgodnie ze wzorem

$$B = B_0(1 + ay),$$

gdzie B_0 oraz a są stałymi.

W chwili początkowej $t = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $v_x = 0$, $v_y = v_{y0} = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Wyznacz numerycznie tory ruchu tego ciała w przedziale czasu od 0 do 0,1 s i przedstaw je graficznie dla następujących wartości stałych: $m = 5,1 \cdot 10^{-26}$ kg, $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, $B_0 = 3,0 \cdot 10^{-5}$ T oraz a równych: 0, 0,1 m^{-1} , 0,2 m^{-1} , 0,5 m^{-1} , 1,0 m^{-1} .

Uwaga:

Rozwiązanie powinno zawierać: wzory używane w rozwiązaniu (wraz z wyprowadzeniem lub uzasadnieniem, jeśli nie są to wzory podane w treści zadania), opis zastosowanego algorytmu, opis kodu programu (lub np. arkusza kalkulacyjnego) użytego do rozwiązania wraz ze sposobem zagwarantowania (lub sprawdzenia) właściwej dokładności wyników, wykres toru (dokładnie dla czasu podanego w treści zadania) dla każdej z podanych wartości a oraz jakościowe omówienie otrzymanych wyników. Na wykresach powinny znajdować się osie x oraz y wraz z zaznaczoną skalą właściwą dla rozpatrywanego zagadnienia.

Nie jest dopuszczalne użycie programów do obliczeń symbolicznych lub programów wyznaczających tor lub ruch automatycznie po podaniu wzoru na siłę.

Dodatkowe wskazówki dotyczące rozwiązywania zadań numerycznych znajdziesz w treściach i rozwiązaniach zadań numerycznych z poprzednich olimpiad.

ZADANIA DOŚWIADCZALNE

Należy przesłać rozwiązania dwóch (i tylko dwóch) dowolnie wybranych zadań doświadczalnych. Za każde z zadań doświadczalnych można otrzymać maksymalnie 40 punktów.

Zadanie D1.

Różne źródła światła mają różne widma – natężenie światła emitowanego przez dane źródło silnie zależy od długości fali. Niech $C_x = I_{c_x} / I_{n_x}$, gdzie I_{c_x} oznacza natężenie długofalowej (czerwonej) części widma widzialnego emitowanego przez źródło x , a I_{n_x} to natężenie krótkofalowej (niebieskiej) części tego widma.

Mając do dyspozycji:

- dwie lampy, jedną wyposażoną w tradycyjną żarówkę (żarówką, z włóknem wolframowym) o mocy od 10 W do 40 W, a drugą wyposażoną w diody elektroluminescencyjne (LED),
- dwa kawałki kolorowego papieru barwionego w całej jego objętości (niemalowanego), jeden czerwony, a drugi niebieski (np. samoprzylepne karteczki do drobnych notatek),
- olej (np. spożywczy),
- taśmę mierniczą lub centymetr krawiecki,

wyznacz stosunek $\frac{C_t}{C_l}$, gdzie C_t i C_l to zdefiniowany powyżej stosunek C_x dla, odpowiednio, tradycyjnej żarówki i źródła światła z diodami LED, a wielkości I_{c_x} oraz I_{n_x} występujące w definicji stosunku C_x oznaczają natężenie tej części widma widzialnego emitowanego przez źródło x , która nie jest absorbowana przez użyty kawałek papieru, odpowiednio, czerwony i niebieski.

Uwagi:

1. W rozwiązaniu podaj nazwę producenta i modelu użytej żarówki i źródła światła z diodami LED.
2. Do rozwiązania dołącz niezabrudzone olejem kawałki kolorowego papieru, jaki był użyty w doświadczeniu.
3. Do wykonania doświadczenia wybierz lampę LED o temperaturze barwowej z zakresu 2600 K – 3100 K.

Zadanie D2.

Mając do dyspozycji:

- odkurzacz z rurą ssącą o końcówce w kształcie okręgu,
- piłeczkę o średnicy większej niż średnica wewnętrzna rury odkurzacza (np. piłeczkę do tenisa stołowego),
- wagę kuchenną,
- sypki materiał (np. piasek lub cukier),
- plastikową torebkę lub butelkę,
- linijkę,
- nożyczki, taśmę klejącą, sznurek lub mocną nić,

wyznacz wartość największego podciśnienia, jakie jest w stanie wytworzyć użyty odkurzacz.

Uwagi:

1. W rozwiązaniu podaj nazwę producenta i modelu użytego odkurzacza.
2. Pamiętaj, że rura pracującego odkurzacza nie powinna być zbyt długo zatkana, może to prowadzić do uszkodzenia urządzenia.

Zadanie D3.

Mając do dyspozycji:

- cylindryczne naczynie o płaskim dnie (np. garnek) o średnicy co najmniej 15 cm, wypełnione do połowy wodą,
- stoper,
- pipetę,
- kamerę lub aparat fotograficzny z możliwością nagrywania filmów,
- linijkę,

wyznacz długość i prędkość fali powstałej na powierzchni wody w wyniku upuszczenia kropli do naczynia.

ROZWIĄZANIA

Rozwiązanie zadania T1

Szczotki są jednakowo obciążone, a zatem w przypadku poślizgu każda z sił tarcia wywieranych na nie przez podłoże jest równa $mg\mu/2$. Siła F , jaką musimy działać na froterkę, jest równa co do wartości ich wypadkowej.

a) Gdy prędkość froterki v jest większa od ωR , siły tarcia są skierowane zgodnie, tzn. $F = mg\mu$. Gdy $v < \omega R$, siły tarcia się równoważą, czyli $F = 0$.

W przypadku $v = \omega R$ siła, z jaką musimy działać na froterkę, jest nieokreślona (dowolna w zakresie od 0 do $mg\mu$), podobnie jak nieokreślona jest siła popychająca stojący na chropowatym podłożu klocek, o którym wiemy tylko, że pozostaje w spoczynku.

b) Prędkość powierzchni szczotki względem podłoża w miejscu ich styku ma wartość

$$v_1 = \sqrt{v^2 + (\omega R)^2} \quad (1)$$

i tworzy z kierunkiem ruchu kąt, którego cosinus wynosi

$$v/v_1 = v/\sqrt{v^2 + (\omega R)^2}. \quad (2)$$

Zatem musimy działać na froterkę siłą

$$mg\mu \cdot \frac{v}{\sqrt{v^2 + (\omega R)^2}}. \quad (3)$$

Siła ta zmienia się od wartości zbliżonej do 0 dla $v \ll \omega R$ do wartości $mg\mu$ dla $v \gg \omega R$.

Uwaga

Powyższe rozwiązanie zakłada, że siła tarcia i siła podtrzymująca ruch froterki są współliniowe. Jeśli tak nie jest, siła reakcji podłoża na działająca każdą ze szczotek nie musi być równa $mg/2$. Zauważmy jednak, że w przypadku, gdy siła podtrzymująca ruch froterki wynosi 0 (przypadek a) gdy $v < \omega R$), nie ma to znaczenia. Nie ma to również znaczenia w przypadku a) gdy $v > \omega R$ oraz w przypadku b), gdyż wtedy rozkład sił reakcji i (nacisku) pomiędzy szczotkami jest nieistotny.

Punktacja zadania T1

Przypadek a).

Uzasadnienie, że gdy $v < \omega R$, szukana siła jest równa zero – 2 pkt.

Uzasadnienie, że gdy $v > \omega R$, szukana siła jest równa $mg\mu$ – 2 pkt.

Zauważenie, że gdy $v = \omega R$ siła jest nieokreślona w granicach od 0 do $mg\mu$ – 1 pkt.

Przypadek b)

Prędkość powierzchni szczotki względem podłogi (wzór (1)) – 2 pkt.

Cosinus kąta, jaki tworzy wektor prędkość powierzchni szczotki względem podłogi z kierunkiem przesuwania się froterki (wzór (2) lub równoważny) – 1 pkt.

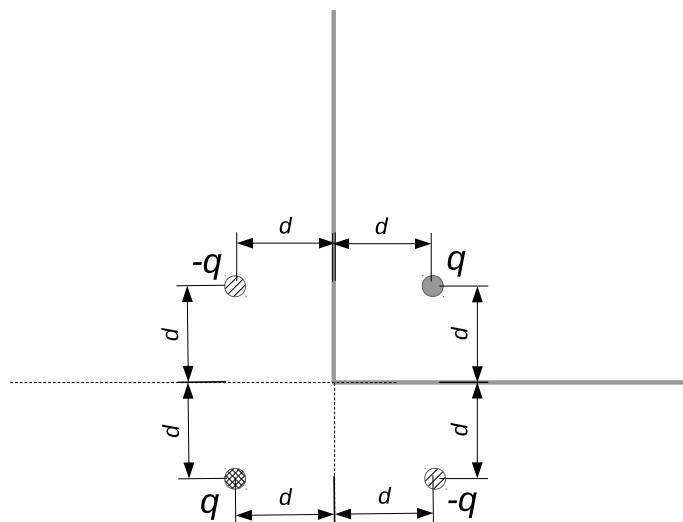
Wynik końcowy (wzór (3)) – 1 pkt.

Dyskusja wyniku końcowego w zależności od v – 1 pkt.

Rozwiązanie zadania T2

Przyjmijmy, że ładunek kulki wynosi q . Zauważmy, że w odległościach od niej znacznie większych niż r pole elektryczne wytwarzane przez nią jest w przybliżeniu takie jak pole ładunku punktowego.

Wektor natężenia pola elektrycznego w każdym punkcie pomiędzy płytami jest sumą wektorów natężenia pola elektrycznego pochodzącego od metalowej kulki oraz pola pochodzącego od ładunku wyindukowanego na płytach. Rozkład tego wyindukowanego ładunku jest taki, aby potencjał pola elektrycznego w miejscu, gdzie znajdują się płyty, był równy zero. Pole, którego potencjał spełnia ten warunek, można uzyskać dodając do pola pochodzącego od kulki pole pochodzące od ładunków „obrazowych” (dwóch $-q$ i jednego $+q$) znajdujących się w miejscach otrzymanych przez odbicie położenia kulki względem płaszczyzn, w których leżą płyty – patrz rysunek. To, że potencjał takiego rozkładu ładunków jest równy zero w miejscu, gdzie znajdują się płyty, wynika z tego, że tam wkłady od ładunków dodatnich znoszą się z wkładami od ładunków ujemnych.



Rysunek do
rozwiązania
zadania T2.

Warto podkreślić, że ładunki obrazowe muszą się znajdować poza rozważanym rzeczywistym obszarem, a przedstawiony na rysunku rozkład ładunków obrazowych, odpowiada temu, jakie jest pole elektryczne w prawej górnej ćwiartce na rysunku.

Siła działająca na kulkę jest równa sile przyciągania kulki przez ładunki obrazowe. Jest ona skierowana do krawędzi łączącej płyty i prostopadła do niej, a jej wartość wynosi

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2d)^2} \cos 45^\circ - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2\sqrt{2}d)^2} \cos 0^\circ + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2d)^2} \cos 45^\circ \quad (4)$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \frac{2\sqrt{2} - 1}{8}, \quad (5)$$

gdzie ϵ_0 jest przenikalnością elektryczną próżni, $2d$ – odległością kulki od ładunku obrazowego powstałego przez odbicie względem płaszczyzny jednej z płyt, a $2\sqrt{2}d$ – odległością kulki od ładunku obrazowego otrzymanego przez podwójne odbicie względem różnych płaszczyzn.

Pozostaje wyznaczyć ładunek q kulki.

Ponieważ $d \gg r$, możemy pominąć wpływ pola elektrycznego ładunków obrazowych na rozkład ładunku na kulce i przyjąć, że jest on równomierny. Potencjał elektryczny sferycznie symetrycznego rozkładu ładunku jest taki, jak potencjał ładunku punktowego. W odległości R od środka wynosi on

$$V(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (6)$$

Zatem, uwzględniając, że odległość płyty od kulki jest znacznie większa od jej promienia, stwierdzamy że napięcie między kulką a płytą wynosi

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (7)$$

Stąd

$$q = 4\pi\epsilon_0 r U. \quad (8)$$

Ostatecznie otrzymujemy, że siła działająca na kulkę jest równa

$$F = \frac{\pi\epsilon_0 r^2 U^2}{d^2} \frac{2\sqrt{2}-1}{2}. \quad (9)$$

Punktacja zadania T2

Właściwe ustalenie położenia i wartości ładunków obrazowych – 4 pkt.

Siła działająca na kulkę przy założeniu, że jej ładunek wynosi q (wzór (4) lub równoważny) – 2 pkt (nawet przy przyjęciu błędnego rozkładu ładunków obrazowych).

Związek między ładunkiem kulki a napięciem między kulką a płytami (wzór (7) lub równoważny) – 2 pkt (nawet, jeśli rozkład ładunków obrazowych jest błędny)

Wynik końcowy (wzór (9)) – 2 pkt.

Rozwiązanie zadania T3

Zauważmy, że odcinki P1–Z2 oraz Z1–P2 są tej samej długości, pole elektryczne jest na nich takie samo, a energia początkowa elektronu (oraz początkowy pęd i długość fali) w punktach P1 oraz Z1 jest również taka sama, zatem te odcinki nie dają wkładu do przesunięcia fazowego między wiązkami.

Pęd elektronu na odcinku P1–Z1 wynosi $p_1 = \sqrt{2mE}$, czyli długość związanej z nim fali jest równa

$$\lambda_1 = \frac{h}{p_1} \quad (10)$$

$$= \frac{h}{\sqrt{2mE}}, \quad (11)$$

gdzie h jest stałą Plancka.

Energia kinetyczna elektronu na odcinku Z2–P2 jest równa $E + eU$, zatem jego pęd na tym odcinku p_2 jest równy $\sqrt{E + 2meU}$ i w konsekwencji długość fali wynosi

$$\lambda_2 = \frac{h}{p_2} \quad (12)$$

$$= \frac{h}{\sqrt{E + 2meU}}. \quad (13)$$

Na odcinku P1–Z1 mieści się $\frac{a}{\lambda_1}$ długości fali, a na odcinku Z2–P2 mieści się $\frac{a}{\lambda_2}$ długości fali. Aby natężenie wiązki zarejestrowane przez detektor było równe 0, musi zajść interferencja destruktywna, tzn. musi być spełniony warunek

$$\frac{a}{\lambda_1} - \frac{a}{\lambda_2} = n + \frac{1}{2}, \quad \text{gdzie } n \text{ jest liczbą całkowitą,} \quad (14)$$

co po uwzględnieniu wzorów na λ_1 i λ_2 oznacza, że zachodzi równość

$$\frac{a}{h} (\sqrt{2mE + 2meU} - \sqrt{2mE}) = n + \frac{1}{2}. \quad (15)$$

Najmniejsze dodatnie U spełniające ten warunek otrzymamy dla $n = 0$, stąd

$$U = \frac{\left(\frac{h}{2a\sqrt{2m}} + \sqrt{E}\right)^2 - E}{e} = \frac{h}{ea} \left(\frac{h}{8ma} + \sqrt{\frac{E}{2m}}\right). \quad (16)$$

Punktacja zadania T3

Zauważenie, że odcinki P1–Z2 oraz Z1–P2 nie dają wkładu do przesunięcia fazowego między wiązkami – 2 pkt.

Długość fali elektronu na odcinku P1–Z1 (wzór (11) lub równoważny) – 1 pkt.

Długość fali elektronu na odcinku P2–Z2 (wzór (13) lub równoważny) – 1 pkt.

Warunek, by natężenie rejestrowanej wiązki było równe 0 (wzór (14) lub równoważny) – 3 pkt.

Szukane napięcie, poprawnie otrzymane na podstawie wszystkich elementów rozwiązania (wzór (16) lub równoważny) – 3 pkt.

Rozwiązanie zadania T4 (numerycznego)

Na ciało o ładunku q poruszające się z prędkością \vec{v} w polu magnetycznym \vec{B} działa siła $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$. Dla sytuacji przedstawionej w zadaniu równania ruchu w płaszczyźnie xy przyjmują postać

$$ma_x = qv_y B_0(1 + ay), \quad (17)$$

$$ma_y = -qv_x B_0(1 + ay), \quad (18)$$

gdzie a_x oraz a_y są odpowiednimi składowymi przyspieszenia. Po podstawieniu $qB_0/m = qB_0 = \omega_0$ (dla danych z zadania $\omega_0 = 94,1 \text{ s}^{-1}$) otrzymamy równania

$$a_x = \omega_0 v_y(1 + ay), \quad (19)$$

$$a_y = -\omega_0 v_x(1 + ay). \quad (20)$$

Dla $a = 0$ mamy do czynienia ze znanym problemem ruchu naładowanej cząstki w jednorodnym polu magnetycznym, którego rozwiązaniem jest ruch po okręgu o promieniu $R = v/\omega_0$. Dla podanych warunków początkowych

$$x = R(\cos \omega_0 t - 1), \quad (21)$$

$$y = -R \sin \omega_0 t. \quad (22)$$

W naszym przypadku $R = 1,06 \text{ m}$.

Rozwiązanie numeryczne I

Aby rozwiązać numerycznie nasze zagadnienie, wprowadźmy pomocniczą zmienną ω daną wzorem

$$\omega = \omega_0(1 + ay), \quad (23)$$

i zapiszmy równania różnicowe odpowiadające równaniom ruchu

$$\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = v_y \omega, \quad (24)$$

$$\frac{\Delta v_y}{\Delta t} = -v_x \omega, \quad (25)$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_x, \quad (26)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = v_y. \quad (27)$$

Dwa z powyższych równań otrzymaliśmy, dokonując zamiany $a_x \rightarrow \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$, $a_y \rightarrow \frac{\Delta v_y}{\Delta t}$ w równaniach (19) i (20), kolejne dwa biorą się wprost z definicji prędkości. Δ odpowiada różnicy między wartością w chwili t_n oraz w chwili $t_{n+1} = t_n + \Delta t$.

Spośród bardzo wielu algorytmów pozwalających na numeryczne rozwiązanie rozważanego zagadnienia, w niniejszym rozwiązaniu wybraliśmy jeden z najprostszych: krok dzielimy na dwie części: najpierw wyznaczamy położenie w chwili $t_n + \Delta t/2$, w tym położeniu obliczamy prawą stronę równań (24) i (25), na jej podstawie wyznaczmy prędkość w chwili $t_n + \Delta t$, a następnie położenie w chwili $t_n + \Delta t$. W efekcie dostajemy następujący układ równań rekurencyjnych, wiążący położenie ciała w chwili t_n z położeniem w chwili t_{n+1}

$$x_{n+1/2} = x_n + v_{x,n} \cdot \Delta t/2, \quad (28)$$

$$y_{n+1/2} = y_n + v_{y,n} \cdot \Delta t/2, \quad (29)$$

$$\omega_{n+1/2} = \omega_0(1 + ay_{n+1/2}), \quad (30)$$

$$v_{x,n+1/2} = v_{x,n} + \omega_{n+1/2}v_{y,n} \cdot \Delta t/2, \quad (31)$$

$$v_{y,n+1} = v_{y,n} - \omega_{n+1/2}v_{x,n+1/2} \cdot \Delta t, \quad (32)$$

$$v_{x,n+1} = v_{x,n+1/2} + \omega_{n+1/2}v_{y,n+1} \cdot \Delta t/2, \quad (33)$$

$$x_{n+1} = x_{n+1/2} + v_{x,n+1} \cdot \Delta t/2, \quad (34)$$

$$y_{n+1} = y_{n+1/2} + v_{y,n+1} \cdot \Delta t/2, \quad (35)$$

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t. \quad (36)$$

Zauważmy, że ponieważ nowe v_x zależy od v_y , a nowe v_y zależy od v_x , wartość $v_{x,n+1}$ obliczamy w dwóch krokach, wykorzystując pośrednią wartość $v_{x,n+1/2}$. Alternatywą jest np. obliczanie nowej prędkości w dwóch krokach

$$v_{x,n+1} = v_{x,n} + \omega_{n+1/2}v_{y,n} \cdot \Delta t, \quad (37)$$

$$v_{y,n+1} = v_{y,n} - \omega_{n+1/2}v_{x,n} \cdot \Delta t, \quad (38)$$

jest to jednak rozwiązanie mniej efektywne.

Do równań (28–36) musimy dopisać równania określające początkowe wartości położenia i prędkości. Zgodnie z treścią zadania są to równania (przyjmujemy, że numerację rozpoczynamy od 1)

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad (39)$$

$$v_{x,1} = 0, \quad v_{y,1} = v_0, \quad (40)$$

gdzie $v_0 = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (w obliczeniach numerycznych musimy pominąć jednostki, co nie prowadzi do błędów, pod warunkiem, że konsekwentnie stosujemy wybrany układ jednostek).

Algorytm odpowiadający powyższym równaniom nie jest najbardziej efektywny, jednak, biorąc pod uwagę, że moc współczesnych komputerów pozwala na przyjęcie bardzo małego kroku czasowego, jak się przekonamy, jest wystarczający do rozwiązania naszego zadania.

Rozwiązanie numeryczne II

W tej wersji rozwiązania nie będziemy jawnie korzystać z równań ruchu, a zamiast tego wykorzystamy fakt, że cząstka o ładunku q i masie m znajdująca się w jednorodnym polu magnetycznym B prostopadłym do wektora początkowej prędkości \vec{v} porusza się z prędkością kątową $\omega = qB/m$ po okręgu. Wektor prędkości cząstki obraca się z prędkością kątową ω w ustalonej płaszczyźnie, a jego długość pozostaje niezmienną. Nawet jeśli pole B , a w konsekwencji ω , ulega zmianie, to w danej chwili wektor prędkości kątowej zachowuje się w opisany sposób. Prowadzi to na przykład do algorytmu:

- przesuwamy cząstkę o wektor $\vec{v}\Delta t/2$

- wyznaczamy prędkość katową ω odpowiadającą nowemu położeniu cząstki
- obracamy wektor prędkości w płaszczyźnie xy o kąt $\omega\Delta t$ (kierunek obrotu wyznaczamy na przykład z reguły prawej dłoni)
- przesuujemy cząstkę o wektor $\vec{v}\Delta t/2$
- zwiększamy czas t o Δt
- powtarzamy powyższe kroki aż do momentu, gdy t stanie się równe zadanemu czasowi końcowemu (lub go przekroczy).

Z tego algorytmu otrzymujemy równania rekurencyjne, w których część odpowiadająca zmianie położenia jest taka sama jak w rozwiązaniu I (równania (28–30), (34–36), nieco inna natomiast jest część odpowiadająca zmianie prędkości

$$v_{x,n+1} = v_{x,n} \cos(\omega_{n+1/2}\Delta t) + v_{y,n} \sin(\omega_{n+1/2}\Delta t), \quad (41)$$

$$v_{y,n+1} = v_{y,n} \cos(\omega_{n+1/2}\Delta t) - v_{x,n} \sin(\omega_{n+1/2}\Delta t), \quad (42)$$

Powyższy układ równań jest praktycznie identyczny z układem równań (37–38). Tak jak w rozwiązaniu I, musimy jeszcze uwzględnić warunki początkowe (39–40).

Opis programów komputerowych

Obie wersje równań rekurencyjnych łatwo jest przekształcić na program komputerowy, który w pętli oblicza kolejne wartości położenia i prędkości. Wersja I tych równań odpowiada następującemu pseudokodowi

```

x = x + vx * dt/2
y = y + vy * dt/2
omega = omega0 * (1 + a*y)
vx = vx + omega * vy * dt/2
vy = vy - omega * vx * dt
vx = vx + omega * vy * dt/2
x = x + vx * dt/2
y = y + vy * dt/2
t = t + dt

```

Powyższe polecenia należy wykonywać w pętli. Należy do nich dodać przypisanie początkowych wartości zmiennym x , y , vx oraz vy , zapisywanie wartości x i y obliczonych w danym kroku (lub rysowanie) oraz warunek końca iteracji (chwila $t = 0,1$ s). Programy w C++ oraz VBA (wraz z skoroszytem MS Excel) są dołączone do rozwiązania dostępnego na stronie KGOF. Aby ułatwić porównywanie wyników i ograniczyć liczbę zapisywanych danych, w programach tych zadana jest liczba położzeń (1000), dla których zapisywane są wartości x oraz y , natomiast między zapisywanymi wartościami wykonywanych jest dn kroków, gdzie dn jest dopasowywaną liczbą całkowitą. Innymi słowy liczba kroków w tych programach wynosi $1000 \cdot dn$, $dt = 0,1/(1000 \cdot dn)$ a zapisywanych jest 1000 wartości (co dn -ty krok).

Na stronie KGOF <http://www.fuw.edu.pl> znajduje się również program w Logo, ten program jest jednak oparty wprost na algorytmie przedstawionym w rozwiązaniu numerycznym II. Schematycznie ten program jest następujący

```

powtarzaj
  np(v0*dt/2)
  omega = omega0*(1 + a*jakieY)
  pw(omega*dt)
  np(v0*dt/2)
  t = t + dt
aż t >= tk

```

W powyższym pseudokodzie polecenie *np* powoduje przesunięcie *żółwia* w kierunku wskazywanym przez niego na odległość równą argumentowi. Polecenie *pw* obraca *żółwia* o kąt będący argumentem tego polecenia, a funkcja *jakieY* zwraca współrzędną *y* aktualnego położenia *żółwia* (patrz dodatkowe opisy i wyjaśnienia w komentarzach do tego kodu).

Krok czasowy oraz sprawdzenie dokładności

Dla każdego z rozważanych programów, wstępnym krokiem było sprawdzenie, czy tor otrzymany w przypadku $a = 0$ jest zgodny z przewidywaniami, tzn. czy jest to okrąg o promieniu $R \approx 1,06$ m. Sprawdzono, że już przy liczbie kroków równej $n = 1000$ otrzymany tor jest zgodny z wynikami teoretycznymi.

Następnie badano tory również dla pozostałych wartości parametru a . Sprawdzono, czy przy ustalonym a (oraz pozostałych wartościach parametrów) dla n kroków oraz dla $5n$ kroków otrzymane wykresy się wizualnie pokrywają.

Okazało się, że dla $n = 1000$, tzn. dla liczby kroków $1 \cdot 1000$ oraz $5 \cdot 1000$ (stosujemy taki zapis, żeby podkreślić, że liczba punktów, na podstawie których rysujemy tor, jest równa 1000), dla wszystkich rozpatrywanych wartości a wykresy się pokrywają.

Pod koniec tego rozwiązania przedstawiono tory uzyskane z wykorzystaniem arkusza kalkulacyjnego i kodu w VBA. Mimo iż legenda opisuje linie z różną liczbą kroków, widoczny jest tylko jeden tor, gdyż oba tory się pokrywają.

Aby sprawdzić, że w otrzymanych przypadkach tory dla różnych liczb kroków rzeczywiście się pokrywają, dodatkowo zrobiono wykres (patrz Rys. 6) dla t w zakresie od 0 do 1,0 s. Widać, że dla czasów t zbliżonych do 1,0 s, tory otrzymane dla liczby kroków 1000 oraz 5000 przestają się pokrywać. Gdyby naszym zadaniem było znalezienie toru w takim zakresie czasów jak na powyższym wykresie, musielibyśmy jeszcze zwiększyć liczbę kroków (pamiętajmy jednak, że dla zbyt dużej liczby kroków mogą się pojawiać błędy związane ze skończoną dokładnością wykonywanych obliczeń i kumulacją błędów). Alternatywnym rozwiązaniem byłoby zastosowanie lepszego algorytmu numerycznego.

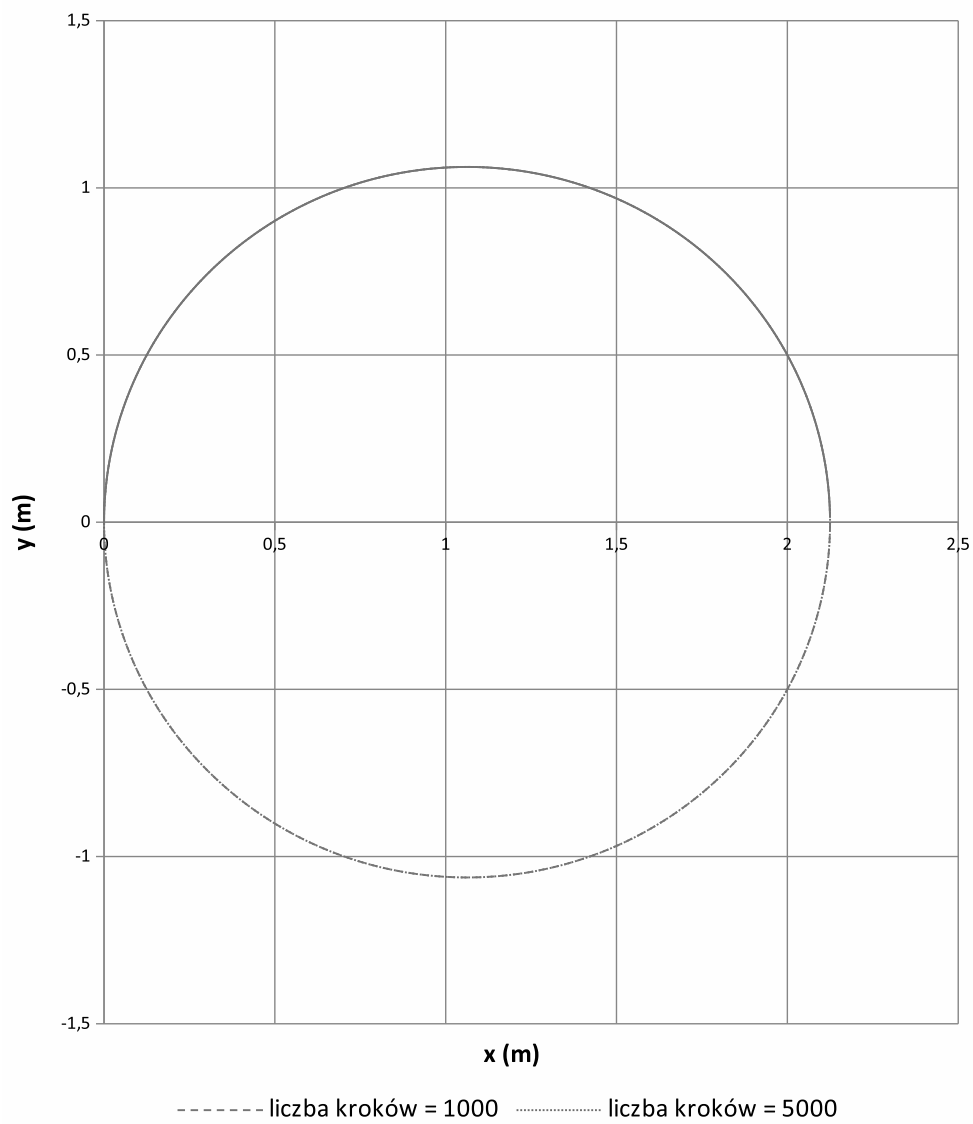
Uwaga: znalezienie toru z Rys. 6 nie jest wymagane w rozwiązaniu.

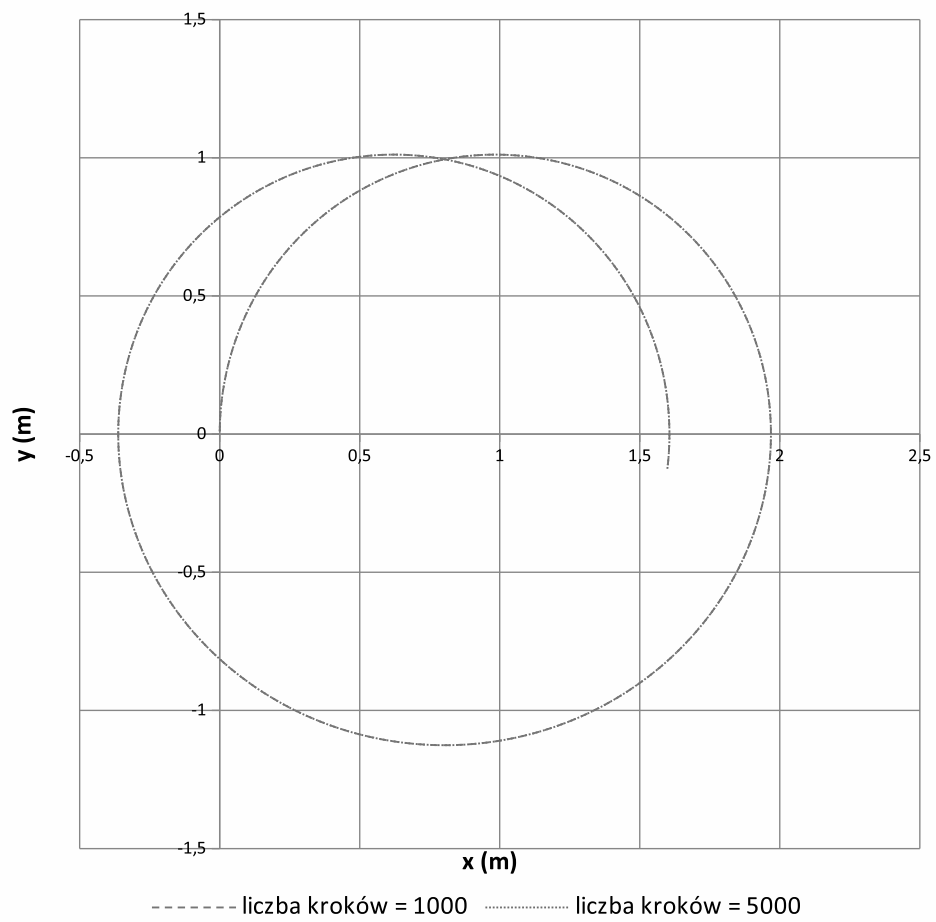
Dyskusja otrzymanych wykresów

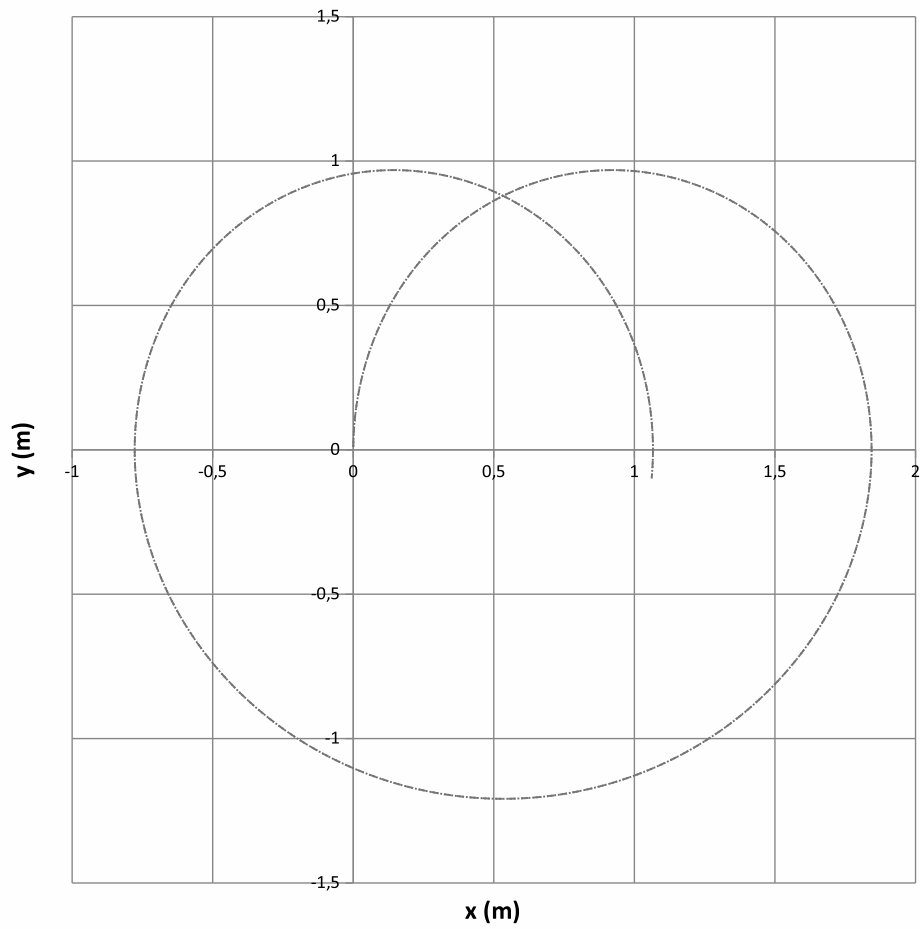
W przypadku $a = 0$ zgodnie z oczekiwaniami ruch odbywa się po okręgu o promieniu $R = 1,06$ m. Dla $a \neq 0$ tor przestaje być krzywą zamkniętą, ale zakres wartości y pozostaje ograniczony. Dla $a = 0,1 \text{ m}^{-1}$ oraz $a = 0,2 \text{ m}^{-1}$ tor jest w przybliżeniu złożeniem ruchu po okręgu z ruchem w kierunku przeciwnym do kierunku osi x . Dla $a = 0,5 \text{ m}^{-1}$ tor staje się bardziej skomplikowany – przypomina fragment ósemki przesuwającej się w kierunku przeciwnym do kierunku osi x . Dla $a = 1,0 \text{ m}^{-1}$ sytuacja drastycznie się zmienia – „ósemka” przesuwa się w kierunku zgodnym z kierunkiem osi x .

Zauważmy, że pojawienie się torów w kształcie „ósemek” jest związane z tym, że cząstka osiąga obszary, gdzie zwrot pola B jest przeciwny do zwrotu osi z .

Punktacja zadania T4 (numerycznego)

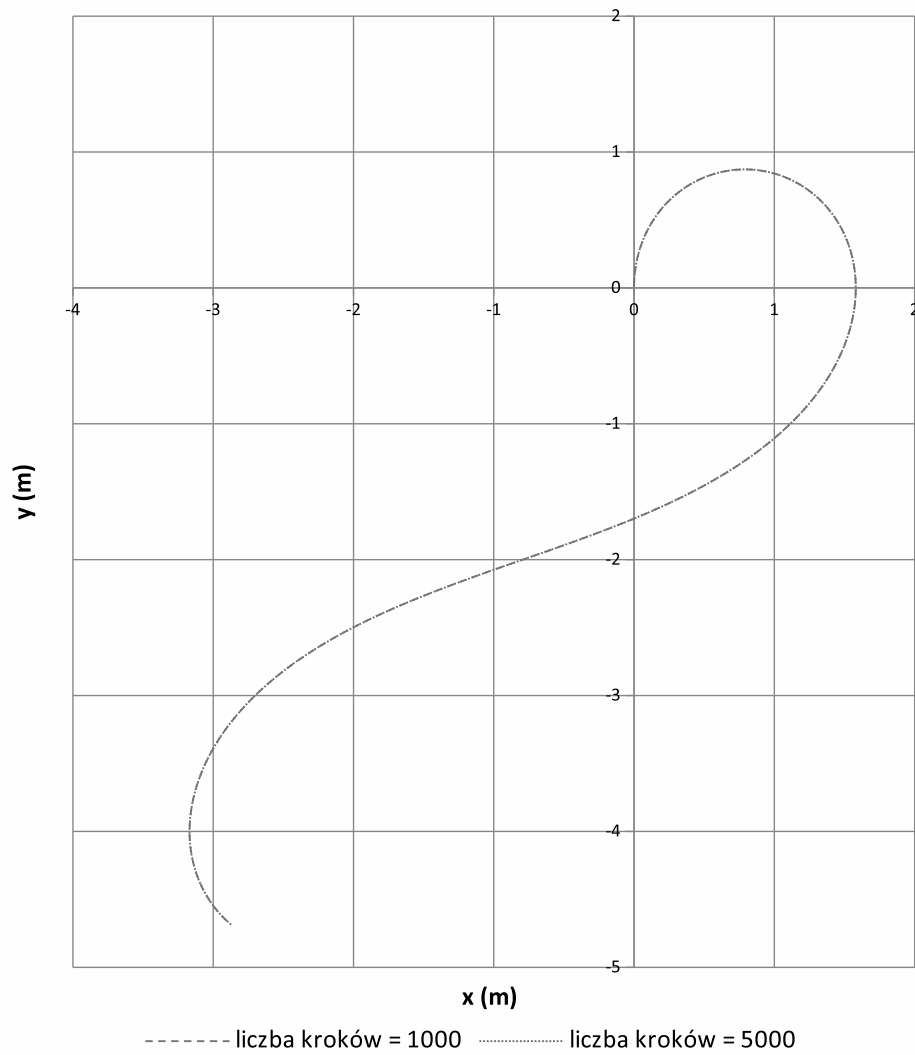
Rysunek 1: Tor dla $a = 0$.

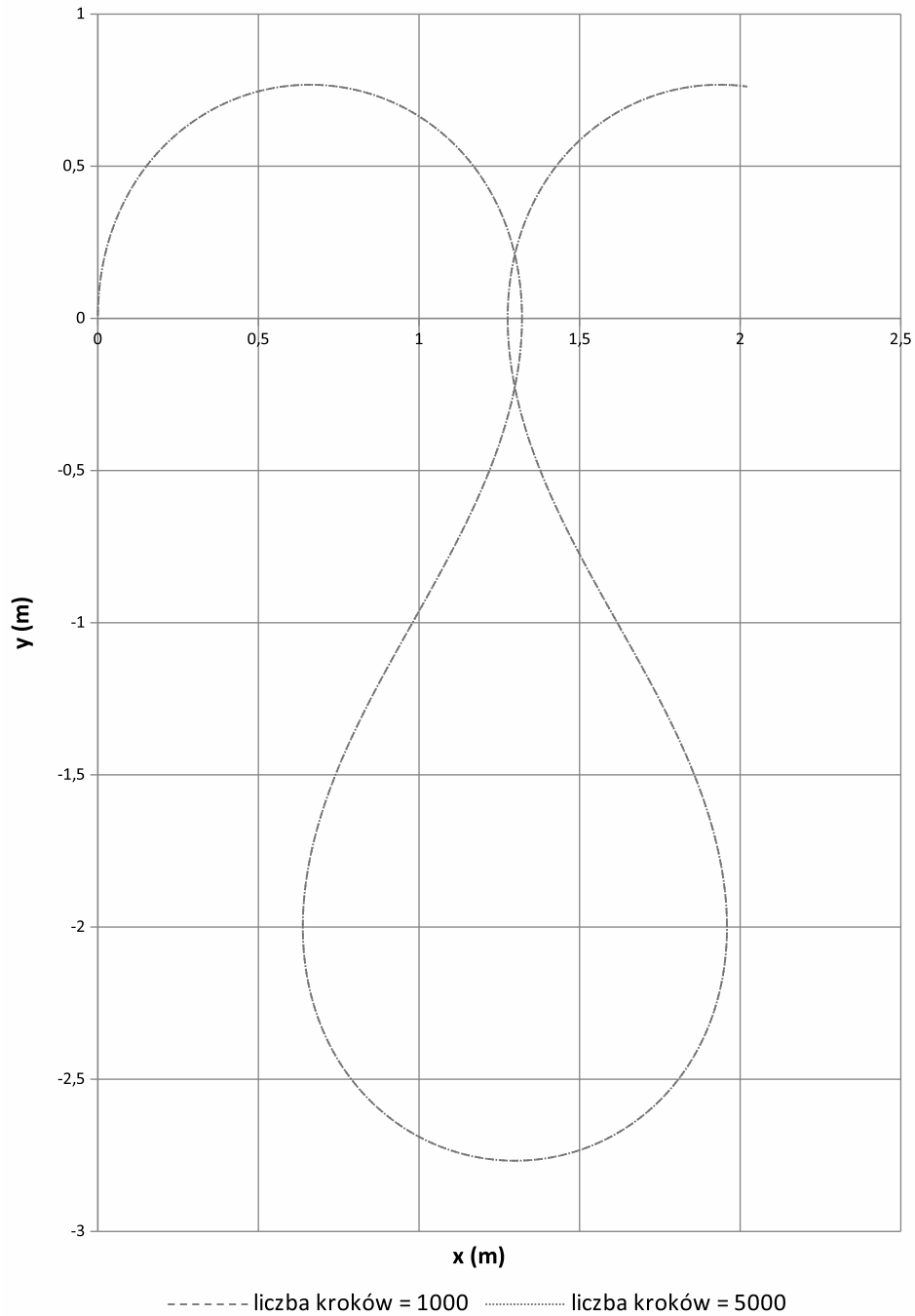
Rysunek 2: Tor dla $a = 0,1 \text{ m}^{-1}$



----- liczba kroków = 1000 liczba kroków = 5000

Rysunek 3: Tor dla $a = 0,2 \text{ m}^{-1}$

Rysunek 4: Tor dla $a = 0,5 \text{ m}^{-1}$

Rysunek 5: Tor dla $a = 1,0 \text{ m}^{-1}$

Równania ruchu cząstki wraz z warunkami początkowymi lub równoważny opis – 1 pkt.

Układ równań różnicowych lub rekurencyjnych pozwalający na numeryczne wyznaczenie ruchu – 2 pkt.

Opis algorytmu oraz sposobu jego implementacji – 1 pkt.

Przedstawienie sposobu weryfikacji prawidłowości otrzymanych wykresów – 2 pkt.

Wykresy zgodne z przedstawionymi w rozwiązaniu wzorcowym – 3 pkt (0,5 pkt za każdy poprawny wykres, zaokrąglone w górę do pełnych punktów).

Dyskusja otrzymanych wykresów – 1 pkt.

Rozwiązanie zadania D1.

Część teoretyczna

Szukany stosunek $\frac{C_t}{C_1}$ można wyznaczyć, używając kawałków papieru z tłustą plamką (wykonaną pośrodku np. za pomocą oleju) w konfiguracji przypominającej fotometr Bunsena. Ponieważ tłusty papier przepuszcza światło dużo lepiej niż papier nienatłuszczony, to fotometr taki pozwala na porównanie natężenia światła padającego na kawałek papieru z dwóch stron. Jeżeli kawałek taki umieścimy pomiędzy dwoma źródłami światła tak, jak pokazano na Rys. 7, to będziemy mogli znaleźć takie jego położenie, przy którym natężenie światła padającego nań z każdego ze źródeł (w odpowiedniej – czerwonej lub niebieskiej – części widma) jest jednakowe. Jeżeli bowiem obserwując taki kawałek z określonej strony, widzimy, że natłuszczona część jest jaśniejsza od części nienatłuszczonej (jak na Rys. 7(a)), to oznacza to, że natężenie światła odbitego od powierzchni kartki znajdującej się z tej strony, z której dokonujemy obserwacji, jest mniejsze od natężenia światła padającego z drugiej strony i przechodzącego przez obszar plamy. Analogicznie – jeżeli natłuszczona część jest ciemniejsza (Rys. 7(b)), to natężenie światła padającego z drugiej strony i przechodzącego przez obszar plamy jest mniejsze. Zatem w poszukiwanym położeniu obie części papieru mają tę samą jasność (Rys. 7(c)). Zakładając, że światło z obu źródeł emitowane jest izotropowo (jednakowo w każdym kierunku) oraz oznaczając poszukiwane odległości między źródłami światła i czerwonym (niebieskim) kawałkiem papieru przez d_{c_t} i d_{c_1} (d_{n_t} i d_{n_1}) jak na Rys. 7(c), możemy zapisać:

$$\frac{I_{c_t}}{I_{c_1}} = \frac{d_{c_t}^2}{d_{c_1}^2}, \quad (43)$$

oraz:

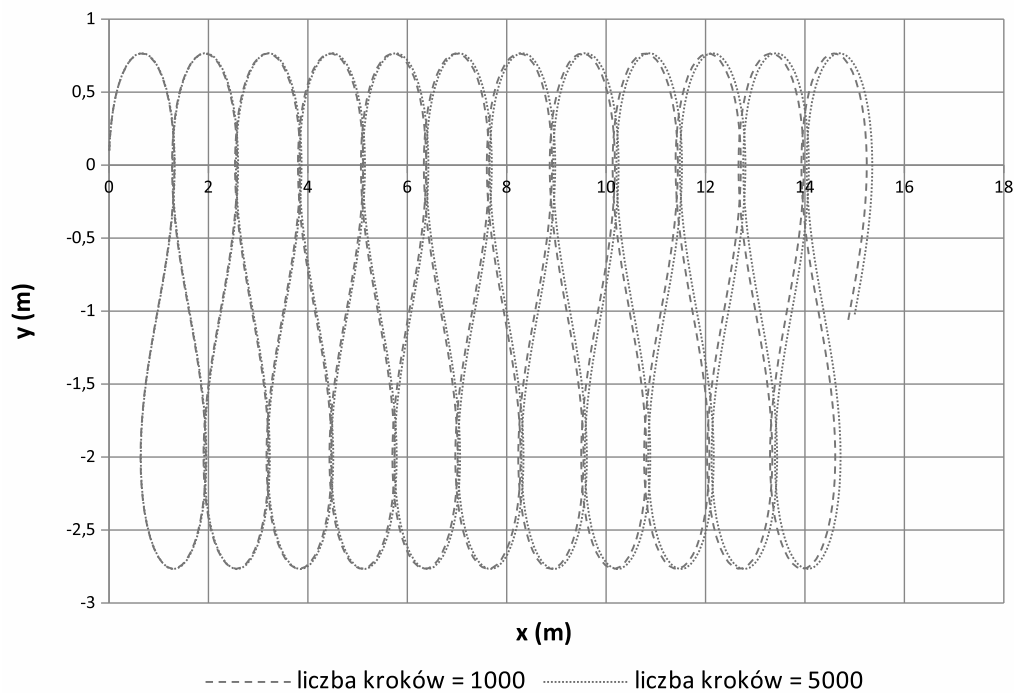
$$\frac{I_{n_t}}{I_{n_1}} = \frac{d_{n_t}^2}{d_{n_1}^2}. \quad (44)$$

Stąd:

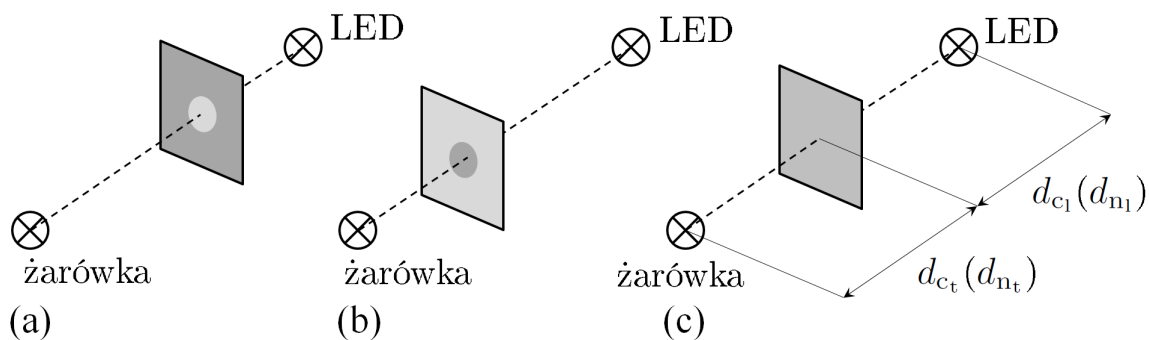
$$\frac{C_t}{C_1} = \frac{I_{c_t}}{I_{n_t}} \frac{I_{n_1}}{I_{c_1}} = \frac{d_{c_t}^2}{d_{c_1}^2} \frac{d_{n_1}^2}{d_{n_t}^2}. \quad (45)$$

Część doświadczalna

Pomiary odpowiednich odległości źródeł światła od fotometru opisanego w części teoretycznej rozwiązania wykonano w pomieszczeniu o ograniczonym oświetleniu zewnętrznym. W prezentowanym rozwiązaniu użyto karteczek Donau Neon oraz lampy LED z IKEA o mocy 3 W i żarówki tradycyjnej 25 W E27. Odległości lampy LED od fotometru, d_{n_1} oraz d_{c_1} , zmierzono bezpośrednio, zaś odległości żarówki od fotometru obliczono wykorzystując relacje $d_{n_t} = D - d_{n_1}$ oraz $d_{c_t} = D - d_{c_1}$, w których $D = (115,0 \pm 0,5)$ cm jest zmierzoną odległością żarówka – lampa LED.



Rysunek 6: Tor dla $a = 1 \text{ m}^{-1}$ w zakresie t od 0 do 1,0 s



Rysunek 7: Szczegóły ustawienia eksperymentu.

	Obserwacja od strony żarówki				Obserwacja od strony LED			
	strona A		strona B		strona A		strona B	
	d_{c_1} (cm)	d_{n_1} (cm)	d_{c_1} (cm)	d_{n_1} (cm)	d_{c_1} (cm)	d_{n_1} (cm)	d_{c_1} (cm)	d_{n_1} (cm)
1	65	72	67	70	62	73	69	74
2	67	73	67	70	65	73	67	72
3	68	70	68	70	65	69	65	71
4	68	70	68	71	66	69	69	70
średnia	67,00	71,25	67,50	70,25	64,50	71,00	67,50	71,75
niepewność	2,00	1,75	0,50	0,75	2,50	2,00	2,50	2,25

Tabela 1: Wyniki pomiarów odległości żarówki od fotometru. Pomiary wykonano, patrząc na każdą z powierzchni kartki (umownie strony A i B) z dwóch różnych kierunków, tj. od strony żarówki oraz od strony lampy LED. Niepewność wyznaczono jako największą różnicę pomiędzy wartością średnią a wynikami pomiaru.

Procedura wyznaczania szukanego położenia fotometru polegała na umieszczeniu go w pobliżu jednej z lamp i powolnym odsuwaniu go od niej do momentu, w którym zatłuszczona część papieru przestawała być odróżnialna od części niezatłuszczonej. Pomiary powtórzono czterokrotnie dla każdego z czterech przypadków: pomiary wykonywano, patrząc od strony żarówki lub od strony diody LED dla dwóch kierunków kartki (tj. skierowaną do żarówki jedną lub drugą powierzchnią). Wyniki pomiarów przedstawia Tabela 1. Szukane odległości wyznaczano za pomocą taśmy mierniczej, zaokrąglając otrzymane wyniki do pełnych centymetrów.

	Obserwacja od strony żarówki		Obserwacja od strony LED	
	strona A	strona B	strona A	strona B
d_{c_1} (cm)	67 ± 2	$67,50 \pm 0,55$	$64,50 \pm 2,50$	$67,50 \pm 2,50$
d_{c_t} (cm)	48 ± 2	$47,50 \pm 0,55$	$50,50 \pm 2,50$	$47,50 \pm 2,50$
d_{n_1} (cm)	$71,25 \pm 1,25$	$70,25 \pm 0,75$	$71,00 \pm 2,00$	$71,75 \pm 2,25$
d_{n_t} (cm)	$43,75 \pm 1,25$	$44,75 \pm 0,75$	$44,00 \pm 2,00$	$43,25 \pm 2,25$
C_t/C_1	1,36	1,22	1,60	1,34

Tabela 2: Zestawienie wartości średnich odległości fotometru od lampy LED dla kartki czerwonej (d_{c_1}) i niebieskiej (d_{n_1}) sporządzone w oparciu o Tabelę 1. Wartości te użyto do obliczenia odległości fotometru od żarówki, d_{c_t} i d_{n_t} . Szukane stosunki C_t/C_1 wyznaczono wykorzystując równanie (45).

Jak widać, w przypadku papieru wykorzystanego w tym rozwiązaniu zmierzone odległości w każdym z czterech wariantów pomiarów (tj. różne kierunki patrzenia oraz strony papieru) nie były znacząco różne i możemy uśrednić otrzymane w Tabeli 2 stosunki C_t/C_1 , otrzymując:

$$\frac{C_t}{C_1} = 1,38 \pm 0,22, \quad (46)$$

gdzie niepewność wyznaczono jako największą różnicę pomiędzy wartością średnią a wartościami C_t/C_1 z Tabeli 2.

Wartość stosunku C_t/C_1 wskazuje, że stosunek mocy emitowanej w czerwonej części widma do mocy emitowanej w niebieskiej części widma jest relatywnie większy dla żarówki niż dla lampy

LED. Nie przesądza to jednak, czy żarówka emituje więcej mocy w czerwonej części widma niż w niebieskiej. Otrzymany stosunek $C_t/C_1 = 1,38$ można bowiem otrzymać np. dla $C_t = 1,89$ i $C_1 = 1,37$ (oba źródła światła emitują więcej światła czerwonego niż niebieskiego) oraz $C_t = 0,80$ i $C_1 = 0,58$ (oba źródła światła emitują więcej światła niebieskiego niż czerwonego).

Może się jednak zdarzyć, że dla użytego papieru wystąpią systematyczne różnice, które utrudniają wyznaczenie właściwego stosunku natężeń. W skrajnych przypadkach, używając równania (45), można otrzymać $C_t/C_1 < 1$, obserwując plamkę od strony lampy LED zaś $C_t/C_1 > 1$ – obserwując od strony żarówki. W przypadku zaobserwowania różnic w stosunku C_t/C_1 między powierzchniami kartki lub kierunkiem obserwacji (tzn. od strony LED lub żarówki) nadal można otrzymać maksymalną liczbę punktów za rozwiązanie zadania, jeśli rozpatrzone zostaną wszystkie cztery możliwości obserwacji plamki. Uproszczony model działania fotometru pomija np. odbicie światła od plamy z olejem oraz zakłada, że obie powierzchnie papieru są identyczne, co w ogólnym przypadku nie musi być prawdą.

Głównym źródłem niepewności otrzymanego wyniku jest niepewność wyznaczenia odległości źródeł światła od fotometru, która wynika z niedokładności ustalenia punktu, w którym jasność plamy zrównuje się z jasnością kartki.

Punktacja zadania D1.

Część teoretyczna

Pomysł na wykonanie fotometru i przeprowadzenie pomiaru – 4 pkt.

Wzory (43) i (44) lub równoważne wraz z uzasadnieniem – 3 pkt.

Wzór (45) lub równoważny – 2 pkt.

Część doświadczalna

Zestawienie i opis układu umożliwiającego poprawne wyznaczenie szukanych odległości – 1 pkt.

Zapewnienie braku wpływu światła zewnętrznego na wynik pomiaru – 1 pkt.

Wykonanie pomiarów odpowiednich odległości co najmniej trzykrotnie dla obserwacji od strony żarówki i co najmniej trzykrotnie dla obserwacji od strony LED – 6 pkt. (pomiar tylko z jednej strony – 3 pkt.)

Wynik liczbowy wraz z oszacowaniem jego niepewności. W przypadku zaobserwowania rozbieżności między obserwacją od strony żarówki i od strony LED dopuszczalne jest również podanie osobno wyników dla obserwacji z obu stron – 2 pkt.

Wskazanie głównych źródeł niepewności – 1 pkt.

Rozwiązanie zadania D2.

Część teoretyczna

Szukaną wartość największego podciśnienia, jakie jest w stanie wytworzyć odkurzacz, można wyznaczyć, porównując siłę grawitacji działającą na obiekt z siłą ciągu odkurzacza. Rozważmy piłeczkę do tenisa stołowego o średnicy większej niż średnica rury odkurzacza. Jeśli do tej piłeczki przyczepiony zostanie pojemnik, np. plastikowa torebka wypełniona sypkim materiałem, to po przyłożeniu jej do końcówki ssącej włączonego odkurzacza zawisnie ona jak na Rys. 1.

Na piłeczkę będą działały trzy siły: łączny ciężar piłeczki i torebki z zawartością \vec{F}_m , siła reakcji rury \vec{F}_R przeciwstawiająca się wciąganiu piłeczki do rury odkurzacza oraz siła ciągu odkurzacza $\vec{F}_{ciąg}$, wynikająca z różnicy ciśnienia atmosferycznego i ciśnienia wewnątrz rury. W równowadze spełnione jest równanie $\vec{F}_{ciąg} + \vec{F}_m + \vec{F}_R = 0$. Zwiększanie \vec{F}_m sprawia, że \vec{F}_R maleje. Gdy osiągnięty zostanie taki graniczny ciężar pojemnika wraz z zawartością $\vec{F}_{m,gran}$, że $\vec{F}_R = 0$ i

$\vec{F}_{\text{ciąg}} + \vec{F}_{\text{m,gran}} = 0$, to dalsze zwiększenie \vec{F}_{m} (tak, że $|\vec{F}_{\text{m}}| > |\vec{F}_{\text{m,gran}}|$) doprowadzi do oderwania się kulki od rury odkurzacza.

Wartość siły ciągu odkurzacza jest wartością stałą i powiązana jest z podciśnieniem P wzorem:

$$F_{\text{ciąg}} = P \cdot S, \quad (1)$$

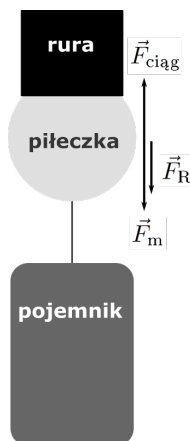
gdzie S to pole powierzchni przekroju rury odkurzacza o średnicy wewnętrznej D ($S = \pi D^2/4$). Możemy przyjąć, że w momencie oderwania się kulki

$$|\vec{F}_{\text{ciąg}}| = |\vec{F}_{\text{m,gran}}|. \quad (2)$$

Z równań (1) i (2) otrzymujemy wzór na podciśnienie wytwarzane przez odkurzacza:

$$P = \frac{|\vec{F}_{\text{m,gran}}|}{S} = \frac{4|\vec{F}_{\text{m,gran}}|}{\pi D^2} = \frac{4g \cdot m_{\text{gran}}}{\pi D^2}, \quad (3)$$

gdzie m_{gran} jest łączną masą piłeczki i torebki wraz z zawartością, przy której nastąpiło oderwanie się piłeczki od rury odkurzacza. Przyjmujemy standardową wartość przyspieszenia ziemskiego $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.



Rysunek 1: Szczegóły ustawienia eksperymentu wraz z zaznaczonymi siłami działającymi na piłeczkę. Widoczna rura odkurzacza z piłeczką, do której dowieszony jest pojemnik z cukrem.

Część doświadczalna

W prezentowanym rozwiązaniu użyto odkurzacza marki Electrolux ZE 337 EL Ergospace, a materiałem sypkim był cukier. W celu przeprowadzenia doświadczenia, do nieobciążonej torebki lub butelki przywiązujemy sznurek i przyklejamy go do piłeczki taśmą. Rurę odkurzacza montujemy pionowo, włączamy odkurzacza i do rury przykładamy piłeczkę tak, jak na Rys. 1. Do torebki powoli dodajemy sypkiego materiału, w ten sposób zwiększając masę doczepioną do piłeczki. Gdy obciążona torebka wraz z piłeczką oderwie się od odkurzacza, wiemy, że ich łączny ciężar równy jest sile ciągu odkurzacza. Masę torebki wraz z zawartością ważymy przy użyciu wagi kuchennej. Następnie wysypujemy zawartość torebki i kilkakrotnie powtarzamy pomiar, za każdym razem notując łączną masę piłeczki oraz torebki wraz z zawartością w momencie oderwania od rury odkurzacza. Przykładowe pomiary pokazuje Tabela 1. Użyta na potrzeby rozwiązania rura odkurzacza miała średnicę wewnętrzną $D = (32,0 \pm 0,5) \text{ mm}$, co w połączeniu z $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ (zakładamy, że wielkość ta jest znana dokładnie) oraz pomiarami zebranymi w Tabeli 1 daje szukaną wartość podciśnienia:

$$P = (27 \pm 1) \text{ kPa}. \quad (4)$$

nr pomiaru	1	2	3	4	średnia	niepewność
masa cukru (kg)	2,25	2,15	2,22	2,27	2,22	0,07

Tabela 1: Wyniki pomiaru łącznej masy piłeczki i torebki wraz z zawartością, przy której nastąpiło jej oderwanie od rury odkurzacza. Za niepewność wyznaczenia masy przyjęto największą różnicę pomiędzy wartością średnią a wynikami pomiaru.

W celu zminimalizowania błędów systematycznych w trakcie przeprowadzania pomiarów istotne jest takie przyklejenie sznurka do piłeczki, aby taśma nie znajdowała się na styku rury z powierzchnią piłeczki, gdyż zmniejszałoby to szczelność połączenia, co przejawiałoby się pozornym zmniejszeniem siły ciągu odkurzacza. Dosypując materiał, należy robić to możliwie powoli (tzn. starać się dosypywać jak najmniejszą ilość materiału na jednostkę czasu), aby precyzyjnie uchwycić moment osiągnięcia masy granicznej m_{gran} . Podczas pomiarów należy się upewnić, że po oderwaniu piłeczki wraz z torebką od rury ssącej i jej upadku na ziemię dosypywany materiał nie rozsypuje się. Należy również zwrócić uwagę, czy w trakcie pomiarów rura odkurzacza jest ustawiona pionowo.

Punktacja zadania D2.

Część teoretyczna

Pomysł układu pomiarowego pozwalającego na wyznaczenie podciśnienia – 3 pkt.

Identyfikacja sił działających na piłeczkę – 2 pkt.

Identyfikacja warunku na oderwanie się piłeczki, wzór (2) lub równoważny wraz z jego uzasadnieniem – 2 pkt.

Wzór (3) lub równoważny wiążący podciśnienie z mierzonymi wielkościami – 3 pkt.

Część doświadczalna

Zestawienie i opis układu umożliwiającego poprawne wyznaczenie masy dosypanego materiału, przy której następuje oderwanie się obciążonej torebki wraz z piłeczką od rury ssącej – 2 pkt.

Wykonanie pomiarów masy co najmniej czterokrotnie – 3 pkt.

Wynik liczbowy wraz z oszacowaniem jego niepewności – 3 pkt.

Wskazanie głównych źródeł niepewności – 2 pkt.

Rozwiązanie zadania D3.

Część teoretyczna

Gdy kropla wody wypuszczona z pipety uderza o powierzchnię wody znajdującej się w naczyniu, następuje wzbudzenie fal na powierzchni wody. Fale te rozchodzą się koncentrycznie od środka naczynia ku jego ściankom. Po dotarciu do ścianek ulegają odbiciu i ponownie osiągają środek naczynia po czasie t_1 od momentu powstania fali. W związku z tym fala o prędkości v przebywa średnicę naczynia d w czasie t_1 , co pozwala wyznaczyć jej prędkość jako

$$v = \frac{d}{t_1}. \quad (1)$$

Niepewność pomiaru czasu t_1 można zmniejszyć poprzez pomiar czasu N -tego powrotu fali

do środka naczynia, t_N . Prędkość fali można wtedy opisać wzorem

$$v = \frac{d}{t_N/N} = \frac{N \cdot d}{t_N}. \quad (2)$$

Długość fali na powierzchni wody λ można próbować zmierzyć bezpośrednio za pomocą linijki, ale jest to niewykonalne w praktyce, gdyż rozważamy w zadaniu fale biegnące. W związku z tym wygodniejsze jest wykonanie zdjęcia fali i pomiar odległości pomiędzy jej grzbietami, która odpowiada szukanej długości fali λ .

Część doświadczalna

Mierzmy średnicę naczynia przy użyciu linijki. W przedstawionym rozwiązaniu wykorzystano garnek metalowy o średnicy wewnętrznej $d = (20,0 \pm 0,1)$ cm. Do garnka nalewamy wodę do mniej więcej połowy jego wysokości (12 cm w przypadku rozpatrywanym w zadaniu). Wykorzystując pipetę, wypuszczamy z niej jedną kroplę wody z wysokości kilkudziesięciu centymetrów, tak by spadła jak najbliżej środka garnka. Kropla, uderzając w powierzchnię wody, powoduje powstanie fal.

Pomiar prędkości fali: W momencie powstania fal (czyli w momencie, gdy kropla uderza o powierzchnię wody) włączamy stoper i mierzymy czas t_N , po którym fala powróci do środka garnka N -ty raz. W praktyce można zaobserwować co najmniej $N = 3$ powroty. W efekcie fala przebywa średnicę garnka d w czasie t_N/N . Na podstawie danych zebranych w Tabeli 1 i w oparciu o wzór (2) otrzymujemy:

$$v = (15,8 \pm 0,7) \text{ cm/s}. \quad (3)$$

nr pomiaru	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
czas t_N (s)	3,83	3,77	3,96	3,75	3,85	3,86	3,88	3,68	3,76	3,72
prędkość (cm/s)	15,7	15,9	15,2	16,0	15,6	15,5	15,5	16,3	16,0	16,1
prędkość średnia v (cm/s)	15,8									
Δv (cm/s)	0,7									

Tabela 1: Pomiar czasu trzeciego powrotu fali do środka naczynia (tj. $N = 3$). Niepewność Δv średniej prędkości wyznaczono jako największą różnicę pomiędzy wartością średnią a wynikami pomiaru.

Pomiar długości fali: Wywołujemy fale na wodzie w sposób opisany jak powyżej. Używając aparatu fotograficznego, robimy zdjęcie fal na wodzie, dbając o to, by było ono zrobione prostopadle do powierzchni wody. Aby ustalić skalę zdjęcia, należy je wykonać tak, by w tle widoczna była skala linijki lub ścianki naczynia w miejscu, gdzie stykają się one z powierzchnią wody. W celu wyznaczenia długości fali wyznaczamy odległość między grzbietami (lub dolinami) fali. Zdjęcie fali pozwala na wyznaczenie jej długości w pikselach lub innych jednostkach umownych. Następnie należy przeliczyć piksele (jednostki umowne) na długość w milimetrach, wykorzystując widoczną na zdjęciu skalę linijki (przykładowo 1 mm na skali linijki będzie odpowiadał 10 pikselom) lub wyrażając znaną średnicę garnka w pikselach (co można odczytać ze zdjęcia). Wyznaczamy długość fali na podstawie kilku zdjęć wykonanych przy nieco różnych ustawieniach kamery (np. dla różnych odległości), można też wielokrotnie mierzyć to samo zdjęcie.

Przykładowo, jeśli punktem odniesienia na zdjęciu jest znana średnica naczynia d , to mierzymy (w dowolnych jednostkach) widoczną na zdjęciu średnicę d_z oraz odległość pomiędzy grzbietami l . W efekcie długość fali wyniesie wtedy

$$\lambda = d \cdot \frac{l}{d_z}. \quad (4)$$

Pomiary przedstawione w Tabeli 2 wykonano wykorzystując pojedyncze klatki filmu przedstawiającego propagujące się na powierzchni wody fale. Średnicę garnka d_z oraz odległość pomiędzy grzbietami fal l zmierzono na monitorze 24-calowym przy pomocy suwmiarki. Oszacowano błąd odczytu wielkości d_z i l na 0,5 mm. Pomiar powtórzono dla 5 różnych klatek.

nr pomiaru	1	2	3	4	5
d_z (mm)	108,4	107,4	106,9	106,7	108,7
l (mm)	11,8	10,9	10,5	10,6	11,8
λ (mm)	21,8	20,3	19,7	19,9	21,7

Tabela 2: Pomiar średnicy naczynia i odległości pomiędzy grzbietami. Długość fali λ wyznaczono ze wzoru (4).

Dla danych z Tabeli 2 otrzymujemy $\lambda = (20,7 \pm 1,1)$ mm. Jako niepewność przyjęto największą różnicę pomiędzy wartością średnią a wyznaczonymi w Tabeli 2 wartościami λ .

Punktacja zadania D3.

Część teoretyczna

Pomysł układu pomiarowego pozwalającego na pomiar prędkości fali – 3 pkt.

Zidentyfikowanie sposobu na zwiększenia dokładności pomiaru czasu, równanie (2) lub równoważne – 2 pkt.

Pomysł na wyznaczenie długości fali – 3 pkt.

Część doświadczalna

Zestawienie i opis układu umożliwiającego poprawne wykonanie doświadczenia – 2 pkt

Wykonanie pomiarów czasu t_N co najmniej czterokrotnie – 4 pkt.

Poprawna kalibracja skali zdjęcia – 2 pkt.

Wynik liczbowy wraz z oszacowaniem jego niepewności – 3 pkt.

Wskazanie głównych źródeł niepewności – 1 pkt.