

LXIV OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY III STOPNIA

CZEŚĆ DOŚWIADCZALNA

Za zadanie D można otrzymać maksymalnie 40 punktów.

Zadanie D.

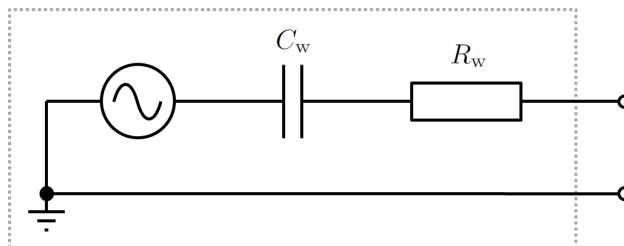
Mając do dyspozycji:

- generator napięcia o przebiegu sinusoidalnym o ustalonej amplitudzie oraz o częstotliwości $f = 2$ kHz,
- analogowy (wskazówkowy) woltomierz napięcia stałego,,
- 5 oporników o oporze $R_1 = (100 \pm 1) \Omega$,
- opornik regulowany
- diodę półprzewodnikową,
- cewkę o nieznanym indukcyjności L i nieznanym oporze R ,
- kable i zaciski umożliwiające zestawienie układu pomiarowego

wyznacz indukcyjność L oraz opór R cewki.

Uwaga:

Generator napięcia jest *sprzężony pojemnościowo*, tzn. można wyobrazić go sobie jako następujący układ zastępczy:



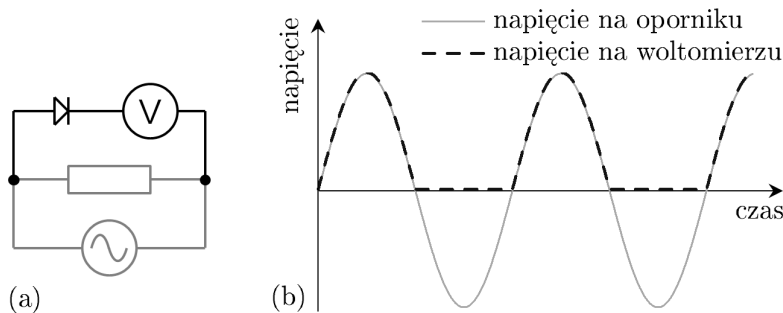
gdzie symbol $\textcircled{\sim}$ oznacza idealny generator napięcia o przebiegu sinusoidalnym.

Rozwiązanie zadania D.

Część teoretyczna

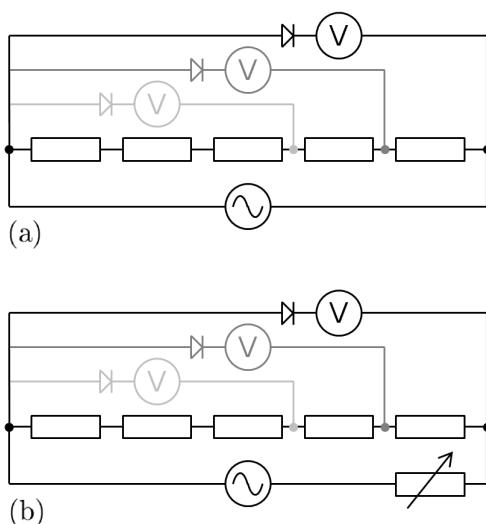
Do wyznaczenia parametrów cewki potrzebny jest przyrząd pozwalający na pomiar amplitudy napięcia zmiennego. Można go skonstruować łącząc szeregowo diodę półprzewodnikową i woltomierz prądu stałego (Rys. 1(a)). Opór zastępczy układu dioda + woltomierz jest nie mniejszy od oporu wewnętrznego woltomierza, dzięki czemu można przyjąć, że dołączenie takiego układu równoległe do wybranego elementu nie zaburza znacząco rozkładu prądów w obwodzie. Warto przy tym zwrócić uwagę na fakt, że warunek ten nie jest spełniony dla równoległego połączenia diody i woltomierza.

Działanie takiego układu pomiarowego najprościej wyjaśnić zakładając na chwilę, że dioda jest idealnym prostownikiem o oporze $R_d = 0$ lub $R_d = \infty$ w zależności od znaku przyłożonego napięcia. W takim przypadku całe chwilowe napięcie $U_R \cos(2\pi ft)$ odkłada się albo na woltomierzu (podczas "dodatniej" połowy okresu) albo na diodzie (podczas "ujemnej" połowy okresu - Rys. 1(b)). Średnia wartość napięcia na woltomierzu jest zatem różna od zera. W uproszczonym modelu idealnego prostownika mierzone woltomierzem napięcie średnie U_{odczyt} jest wprost proporcjonalne do amplitudy napięcia U_R . W rzeczywistości charakterystyka diody jest bardziej skomplikowana i w ogólności nie można zakładać takiej proporcjonalności. Dlatego pierwszym etapem doświadczenia jest kalibracja skonstruowanego miernika napięcia zmiennego.



Rys. 1. (a) Schemat pomiaru amplitudy napięcia zmiennego. (b) Przebieg napięcia na mierzonym oporniku oraz napięcia na woltomierzu przy założeniu idealnych właściwości prostowniczych diody.

Idea kalibracji miernika przedstawiona jest na rysunku 2(a). Wykonać ją można w układzie, w którym do wyjścia generatora dołączonych jest pięć szeregowo połączonych oporników. W takim obwodzie napięcie wytwarzane przez generator rozkłada się równomiernie na wszystkie oporniki. Dokonując pomiaru spadku napięcia na kolejno: jednym, dwóch, ..., pięciu opornikach można odczytać zatem, jakie wartości U_{odczyt} odpowiadają amplitudom $\frac{1}{5}U_G$, $\frac{2}{5}U_G$, ..., U_G , gdzie U_G jest amplitudą napięcia wytwarzanego przez generator. W celu uzyskania dokładniejszej kalibracji można zbudować analogiczny układ z 4 opornikami i wyznaczyć dodatkowo wartości odpowiadające $\frac{1}{4}U_G$, $\frac{2}{4}U_G$, oraz $\frac{3}{4}U_G$. Trzeba jednak zwrócić uwagę na fakt, że ze względu na impedancję generatora, napięcie U_G zależy od jego obciążenia. Problem ten można rozwiązać dołączając szeregowo do obwodu regulowany opornik, jak na rysunku 2(b).



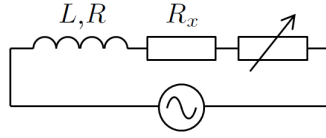
Rys. 2. Schemat układu pozwalającego na przeprowadzenie kalibracji miernika amplitudy napięcia zmiennego przy użyciu: (a) ustalonej liczby szeregowo połączonych oporników, (b) różnych liczb szeregowo połączonych oporników, dzięki możliwości regulacji napięcia U_G za pomocą opornika regulowanego.

Procedura kalibracji wygląda ostatecznie następująco:

1. Budujemy obwód łącząc szeregowo pięć oporników 100Ω , opornik regulowany oraz generator. Amplitudę spadku napięcia na pięciu opornikach 100Ω oznaczamy przez U_0 .
2. Dokonujemy odczytu wartości wskazywanej przez miernik po podłączeniu go równolegle do jednego, dwóch, ... pięciu oporników, co daje nam punkty kalibracyjne: $U_{\text{odczyt}}(\frac{1}{5}U_0)$, $U_{\text{odczyt}}(\frac{2}{5}U_0)$, ..., $U_{\text{odczyt}}(U_0)$.
3. Przebudowujemy obwód odłączając jeden z oporników 100Ω .
4. Nastawiamy opornik regulowany tak, by wskazanie miernika po podłączeniu go równolegle do czterech oporników wynosił ponownie $U_{\text{odczyt}}(U_0)$.
5. Dokonujemy odczytu wartości wskazywanej przez miernik po podłączeniu go równolegle do jednego, dwóch oraz trzech oporników, co daje nam punkty kalibracyjne: $U_{\text{odczyt}}(\frac{1}{4}U_0)$, $U_{\text{odczyt}}(\frac{2}{4}U_0)$ oraz $U_{\text{odczyt}}(\frac{3}{4}U_0)$.
6. W razie potrzeby przebudowujemy obwód odłączając kolejny z oporników 100Ω i postępujemy analogicznie do pkt. 4. i 5.

Powyższą procedurę możemy rozszerzyć również na układy z opornikami łączonymi równolegle.

Mając wykalibrowany miernik można przystąpić do właściwych pomiarów indukcyjności L oraz oporu R cewki. Dokonać ich można w obwodzie złożonym z połączonych szeregowo: generatora, cewki, opornika o znanym oporze R_x oraz (opcjonalnie) opornika regulowanego. Schemat takiego obwodu przedstawiono na Rys. 3:



Rys. 3. Schemat obwodu umożliwiającego wykonanie pomiarów indukcyjności L oraz oporu R cewki.

Należy w nim zmierzyć amplitudę spadku napięcia na samym oporniku (U_{R_x}) oraz na cewce i oporniku (U_{L+R_x}). Oznaczmy przez I natężenie prądu płynącego w obwodzie. Mamy wtedy:

$$IR_x = U_{R_x} \quad (1)$$

oraz

$$IZ_{L+R_x} = U_{L+R_x}, \quad (2)$$

gdzie $Z_{L+R_x} = \sqrt{(R_x + R)^2 + (2\pi fL)^2}$ oznacza zawadę zastępczą cewki i opornika. Przekształcając powyższe wzory otrzymujemy:

$$\left[R^2 + (2\pi fL)^2 \right] + 2R_x R = R_x^2 \left(\frac{U_{L+R_x}^2}{U_{R_x}^2} - 1 \right). \quad (3)$$

Równanie (3) można interpretować jako zależność liniową typu $A+Bx = y$, gdzie $x = R_x$, natomiast $y = R_x^2 \left(\frac{U_{L+R_x}^2}{U_{R_x}^2} - 1 \right)$. Dokonując serii pomiarów dla różnych wartości R_x można wyznaczyć wartości współczynników A i B poprzez dopasowanie odpowiedniej prostej na wykresie $y(x)$, a następnie na ich podstawie wyznaczyć szukane wielkości R oraz L .

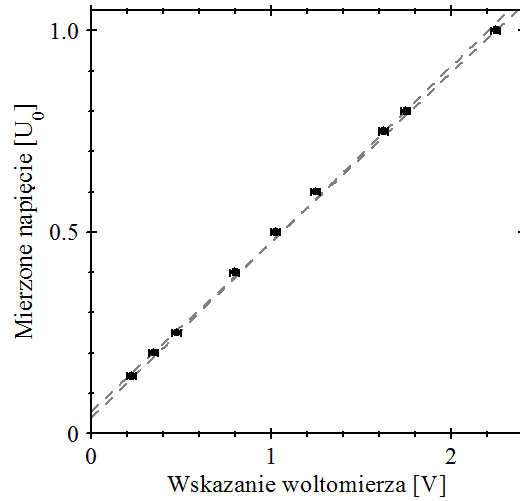
Część doświadczalna

W celu dokonania pomiarów zestawiono najpierw układ do kalibracji miernika, przedstawiony na Rys. 2(b). Poszczególne elementy obwodu połączono ze sobą za pomocą kabli z zaciskami.

Poniższa tabela zawiera parametry zbadanych punktów kalibracyjnych:

Amplituda spadku napięcia	Wskazanie woltomierza
$\frac{1}{7}U_0$	0,225 V
$\frac{1}{5}U_0$	0,35 V
$\frac{1}{4}U_0$	0,475 V
$\frac{2}{5}U_0$	0,8 V
$\frac{1}{2}U_0$	1,025 V
$\frac{3}{5}U_0$	1,25 V
$\frac{3}{4}U_0$	1,625 V
$\frac{4}{5}U_0$	1,75 V
U_0	2,25 V

Po wykreśleniu tych danych na wykresie (Rys. 4):



Rys. 4. Zależność mierzonego napięcia od wskazania woltomierza w układzie przedstawionym na Rys. 2(b). Linie przerywane odpowiadają prostym o możliwie najmniejszym i największym nachyleniu, przechodzącym przez co najmniej 80% punktów pomiarowych.

widać, że krzywa kalibracyjna z dobrym przybliżeniem może być traktowana jako prosta o równaniu:

$$U_m = aU_{\text{odczyt}} + b, \quad (4)$$

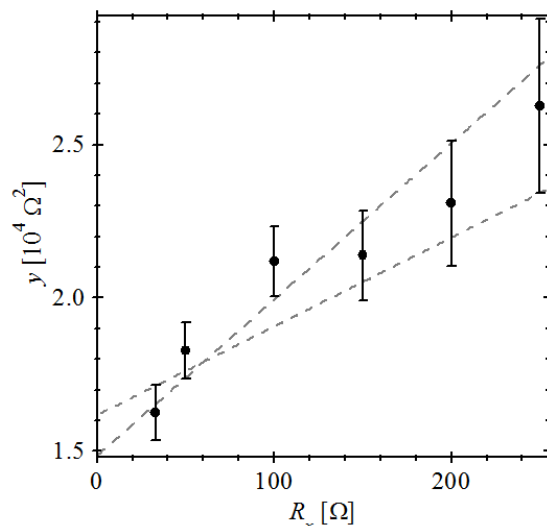
gdzie U_m oznacza rzeczywistą wartość mierzonej amplitudy napięcia, $a = (0,428 \pm 0,005) U_0 \text{ V}^{-1}$, a $b = (0,0473 \pm 0,0045) U_0$. Współczynnik b nie jest równy zero, co wynika z faktu, że dioda nie jest idealnym prostownikiem i zaczyna przewodzić prąd elektryczny dopiero po przyłożeniu do niej napięcia większego od pewnej ustalonej wartości, zwanej *napięciem przewodzenia*.

Dysponując krzywą kalibracyjną przystąpiono do pomiarów indukcyjności L oraz oporu R , w obwodzie przedstawionym na Rys. 3. Dla wygody, dla każdej wartości oporu R_x tak ustawiano opornik regulowany włączony szeregowo do obwodu, aby wartość amplitudy napięcia U_{L+R_x} wynosiła U_0 (czyli tyle samo, co całkowita amplituda napięcia podczas kalibracji).

Odczytane wskazania woltomierza oraz wyznaczone na ich podstawie wartości amplitudy napięcia U_{R_x} dla każdej wartości oporu R_x zebrano w poniższej tabeli:

R_x	Wskazanie woltomierza dla opornika	U_{R_x}
$33\frac{1}{3} \Omega$	0,475 V	$(0,251 \pm 0,007) U_0$
50Ω	0,700 V	$(0,347 \pm 0,008) U_0$
100Ω	1,213 V	$(0,566 \pm 0,011) U_0$
150Ω	1,563 V	$(0,716 \pm 0,012) U_0$
200Ω	1,750 V	$(0,796 \pm 0,013) U_0$
250Ω	1,850 V	$(0,839 \pm 0,014) U_0$

Posługując się tymi danymi wykreślono zależność wartości wyrażenia $y = R_x^2 \left(\frac{U_{L+R_x}^2}{U_{R_x}^2} - 1 \right)$ od wartości $x = R_x$:



Rys. 5. Zależność wartości y od R_x . Linie przerywane odpowiadają prostym o możliwie najmniejszym i największym nachyleniu, przechodzącym przez co najmniej 80% punktów pomiarowych.

Z dopasowania odpowiednich prostych otrzymano następnie wartości współczynników $A = R^2 + (2\pi fL)^2 = (1,555 \pm 0,065) \cdot 10^4 \Omega^2$ oraz $B = 2R = (40 \pm 11) \Omega$, a stąd ostateczne wartości:

$$L = (9,80 \pm 0,27) \text{ mH}$$

$$R = (20,0 \pm 5,5) \Omega.$$

Głównym źródłem niepewności pomiarowych w eksperymencie jest dokładność użytego woltomierza napięcia stałego. Warto przy tym zauważyć, że niepewność względna wyznaczonej wartości L jest stosunkowo mała, podczas gdy niepewność względna wyznaczonej wartości R - dużo większa. Wynika to z faktu, że w użytym układzie pomiarowym głównym składnikiem zawady cewki jest jej indukcyjność, podczas gdy jej opór jest o ok. rząd wielkości mniejszy od zawady.

Punktacja zadania D.

Pomysł na sposób pomiaru napięcia zmiennego – 2 pkt.

Zauważenie potrzeby kalibracji miernika – 1 pkt

Pomysł na sposób przeprowadzenia kalibracji – 2 pkt.

Uwzględnienie faktu, że napięcie U_G zależy od obciążenia generatora – 1 pkt

Pomysł na sposób pomiaru indukcyjności L oraz oporu R – 2 pkt.

Wzór (3) lub równoważny – 2 pkt.

Wykonanie kalibracji miernika – 3 pkt.

Wykonanie pomiarów umożliwiających wyznaczenie indukcyjności L oraz oporu R – 2 pkt.

Analiza danych eksperymentalnych i wykonanie odpowiednich wykresów – 3 pkt.

Wynik liczbowy – 1 pkt

Dyskusja niepewności wyniku – 1 pkt