

Mając do dyspozycji

- 20 kartek papieru o gramaturze  $80 \text{ g/m}^2$  i wymiarach  $297\text{mm}$  na  $210\text{mm}$  (format A4),
- 2 spinacze biurowe o masie  $0,36 \text{ g}$  każdy,
- nitkę,
- probówkę,
- taśmę klejącą,
- nożyczki,

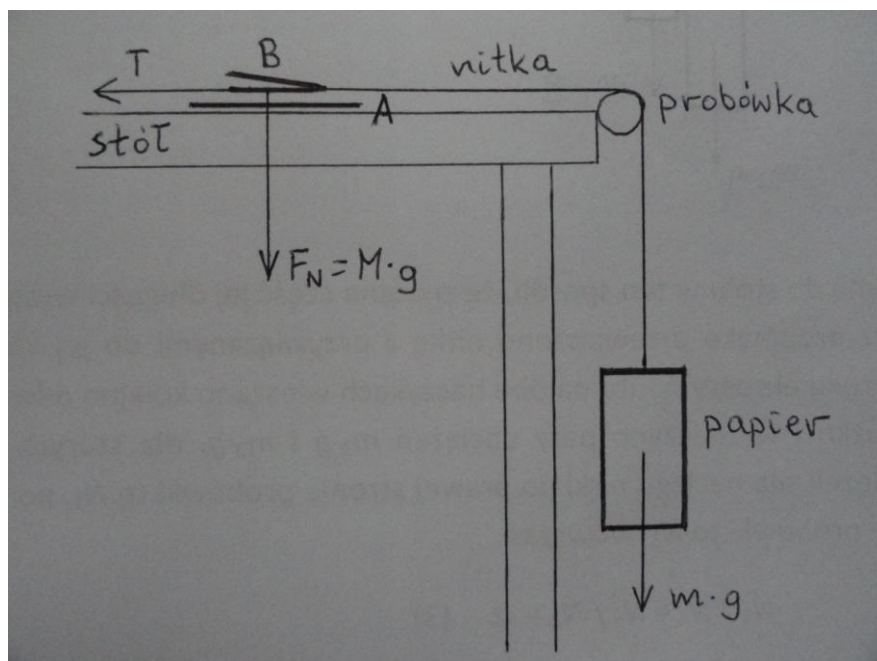
zbadaj, czy maksymalna siła tarcia statycznego papieru o papier jest wprost proporcjonalna do siły nacisku w zakresie wartości sił nacisku na jednostkę powierzchni od  $0$  do  $16 \text{ Pa}$ . Wyznacz współczynnik tarcia statycznego papieru o papier w tym zakresie. Przyjmij, że przyspieszenie ziemskie wynosi  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

Uwaga: Nie przesuwaj ani nie pochylaj stołu, na którym wykonujesz doświadczenie.

### Rozwiązanie:

#### **Część teoretyczna:**

Współczynnik tarcia statycznego  $\mu$  pomiędzy dwoma ciałami definiuje się jako stosunek maksymalnej siły tarcia  $T$ , gdy te ciała nie poruszają się względem siebie, do siły nacisku  $F_N$  jednego ciała na drugie:  $\mu = T/F_N$ . W celu wyznaczenia współczynnika tarcia  $\mu$  papieru o papier został wykorzystany następujący układ eksperymentalny:



Na stole przyklejono za pomocą taśmy jedną kartkę papieru (A). Kolejne kartki były źródłem siły nacisku  $F_N$ . Do pierwszej z kartek obciążających (B) przymocowano nitkę. Dzięki temu można było określić maksymalną wartość siły tarcia  $T$ , gdy kartki A i B spoczywają względem siebie. Wartość  $T$  wyznaczano poprzez obciążanie kartkami drugiego końca nitki przełożonej

przez probówkę przymocowaną przy krawędzi stołu. Jednego ze spinaczy użyto jako haczyka do wieszania kartek-odważników.

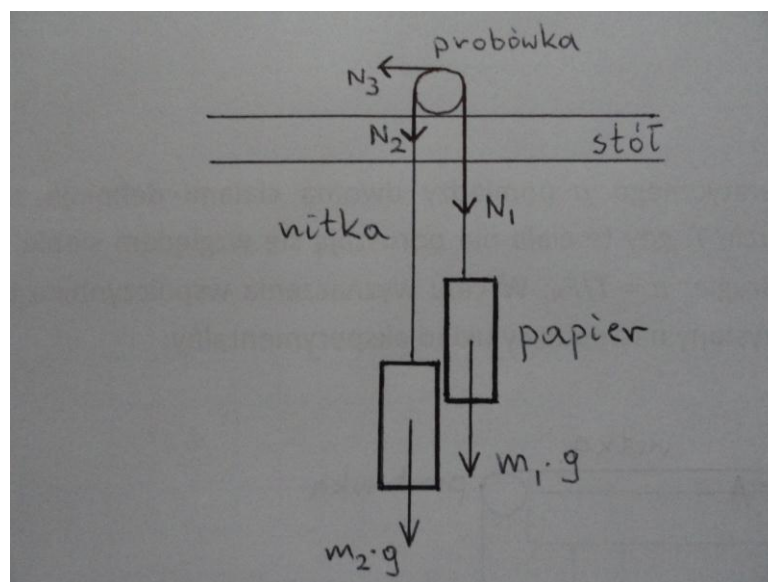
Zgodnie z przedstawioną w treści zadania hipotezą

$$T = \mu \cdot F_N = \mu \cdot M \cdot g, \quad (1)$$

gdzie  $M$  oznacza masę kartek położonych na kartce A. Z drugiej strony, siła tarcia  $T$  jest równa sile naciągu nitki na odcinku poziomym. Niech  $\alpha$  oznacza stosunek sił naciągu nitki na odcinku pionowym i poziomym, czyli:

$$\alpha = m \cdot g / T, \quad (2)$$

gdzie  $m \cdot g$  to ciężar wiszący na nitce z boku stołu. Zakładając, że współczynnik tarcia nitki o probówkę nie zależy od siły nacisku nitki na probówkę, parametr  $\alpha$  będzie stały. Wyznaczono go korzystając z następującego układu pomiarowego:



Probówkę przyklejono taśmą do stołu w ten sposób, że znaczna część jej długości wystawała poza krawędź stołu. Przez probówkę przewieszono nitkę z przywiązanymi do jej końców haczykami ze spinaczy. W toku eksperymentu na obu haczykach wieszano kolejno odważniki (połówki kartek i całe kartki) i wyznaczano pary obciążeń  $m_1 \cdot g$  i  $m_2 \cdot g$ , dla których nitka zaczynała się przesuwac. Jeżeli siła naciągu nitki po prawej stronie probówki to  $N_1$ , po lewej stronie to  $N_2$ , a na szczycie probówki to  $N_3$ , wówczas

$$N_1 / N_3 = N_3 / N_2 = \alpha, \quad (3)$$

czyli

$$\alpha = (N_1 / N_2)^{1/2} = (m_1 / m_2)^{1/2}. \quad (4)$$

Znając wartość  $\alpha$  można zmierzyć i wykreślić zależność  $T$  od  $M \cdot g$ , aby sprawdzić, czy te dwie wielkości łączy zależność liniowa i czy można wyznaczyć wartość współczynnika  $\mu$ .

## Część doświadczalna

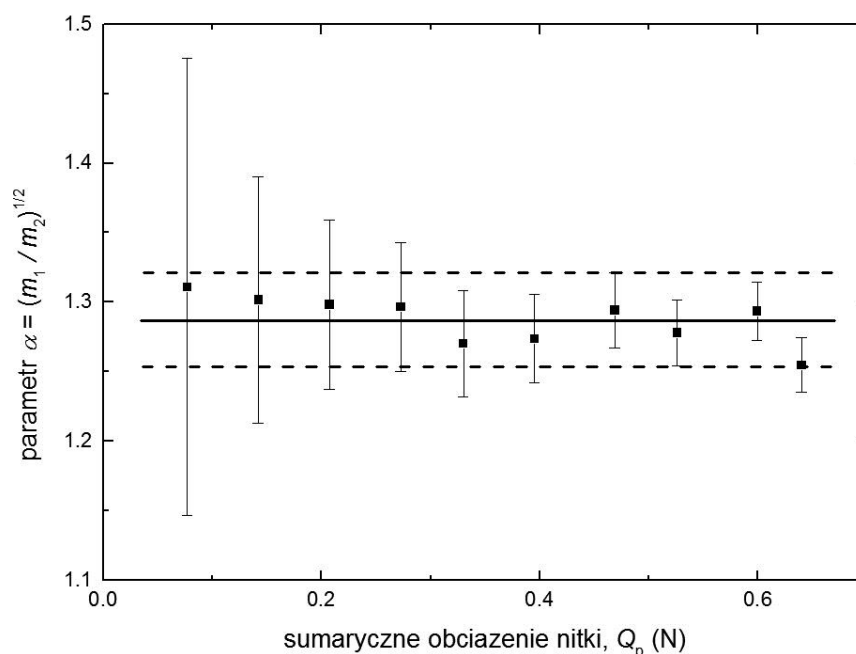
Kartkę A (podłoże) naciągnięto i oklejono taśmą, aby zminimalizować jej pofałdowanie, które mogłoby przeszkadzać w przesuwaniu się kartek względem siebie. Kartkę B i pozostałe kartki obciążające były złożone na pół, aby mieściły się na podłożu i nie tarły o stół lub taśmę klejącą przytrzymującą kartkę A. Nitkę przewleczono przez otwór kartki B wykonany jak najbliżej zgięcia i przyklejono od wewnątrz złożonej kartki do jej dolnej połowy, aby uniknąć unoszenia górnej części podczas ciągnięcia. Od spodu próbówki przyklejono wykonaną z wielokrotnie złożonego papieru podpórkę, która zapobiegała opadaniu próbówki. Dzięki temu odcinek nitki między kartką B a próbówką był naciągnięty i przebiegał poziomo nie dotykając podłoża. Podczas całego eksperymentu sprawdzano, czy poziomy odcinek nitki był naciągnięty prostopadłe do krawędzi stołu. Aby próbówka nie przechylała się w dół podczas pomiarów współczynnika tarcia nitki o próbówkę, tę ostatnią mocno przyklejono do stołu.

W obu eksperymentach na spinaczach wieszano jako odważniki połówki kartek lub całe kartki. Jako niepewność pomiaru wielkości  $m \cdot g$  i  $m_1 \cdot g$  przyjęto ciężar 1/4 kartki. Pominięto zdecydowanie mniejszą niepewność wynikającą z niedokładnego dzielenia kartek na połowy. Oznacza to jednocześnie, że wielkości  $M \cdot g$  i  $m_2 \cdot g$  przyjęto jako wartości dokładne. Podczas pomiarów wyznaczano najmniejszą liczbę odważników, która nie pozwalała na zachowanie równowagi statycznej. Zatem zmierzona wartość obciążenia stanowiła górne ograniczenie na szukane wielkości  $m \cdot g$  i  $m_1 \cdot g$  odpowiadające obciążeniom granicznym, przy których oba układy pomiarowe wciąż pozostawały w równowadze statycznej. Aby zbliżyć się do poszukiwanych wartości  $m \cdot g$  i  $m_1 \cdot g$ , od zmierzonych wyników odjęto ciężar 1/4 kartki (czyli 1/2 najmniejszego użytego odważnika). Kartki wieszano delikatnie, aby uniknąć szarpnięcia spinacza i nitki. Przy wyznaczaniu parametru  $\alpha$  siły tarcia nitki o próbówkę unikano dotykania o siebie kartek zawieszonych po dwóch stronach próbówki; pomocne w tym było użycie stosunkowo długiej nitki. W obu eksperymentach wykonano 3 serie pomiarów, których wyniki (wyrażone w liczbie kartek) znajdują się w poniższych tabelach:

$M$ (liczba kartek)	$m$ (liczba kartek)		
	seria 1	seria 2	seria 3
1	0,5	0,5	0,5
2	1	1	1
3	2	1,5	1,5
4	2,5	2,5	2
5	2,5	3	2,5
6	3,5	3	3
7	3,5	3,5	3
8	4	4	4
9	4	4,5	4
10	4,5	4,5	4,5
11	5	5	4,5

$m_2$ (liczba kartek)	$m_1$ (liczba kartek)		
	seria 1	seria 2	seria 3
0,5	1,5	1	1
1	2	2	2
1,5	3	2,5	3
2	3,5	3,5	4
2,5	4,5	4	4,5
3	5	5	5,5
3,5	6	6,5	6
4	6,5	7	7
4,5	7,5	8	8
5	8	8,5	8

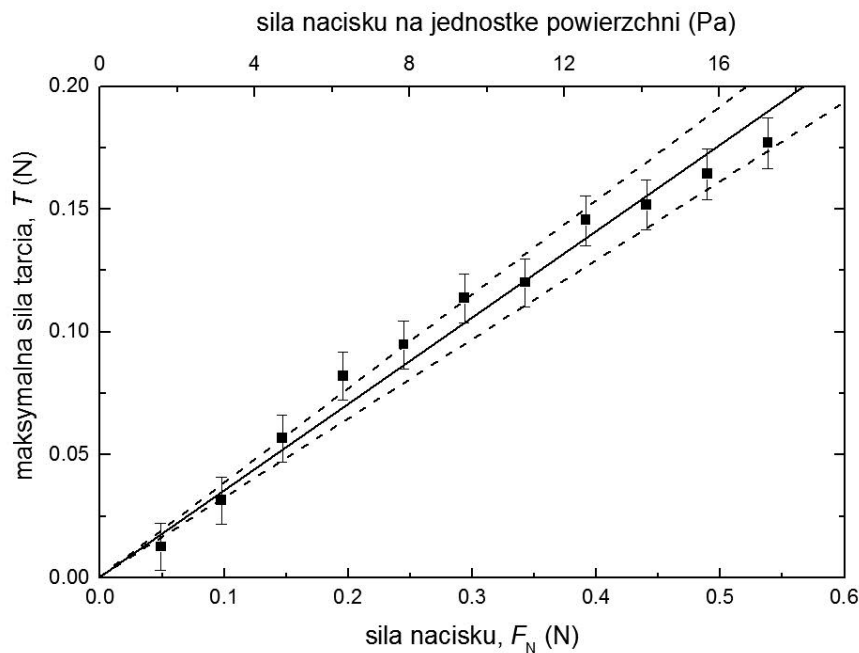
Przy wyznaczaniu parametru  $\alpha$  siły tarcia nitki o probówkę przyjęto założenie, że o ile siła tarcia rośnie ze zwiększaniem sumarycznego obciążenia nici  $Q_p = m_1 \cdot g + m_2 \cdot g$ , to  $\alpha$  nie zależy od  $Q_p$  w badanym zakresie sumarycznego obciążenia. Dlatego dla każdej wartości  $Q_p$  korzystając ze wzoru (4) obliczono odpowiednią wartość  $\alpha$ . Wartości te następnie uśredniono. Na rysunku poniżej linia ciągła oznacza średnią wartość parametru  $\alpha_{sr}$ , a linie przerywane – arbitralnie wybrany przedział zmienności.



Połowę szerokości tego przedziału przyjęto jako niepewność wyznaczenia wartości średniej. W ten sposób uzyskano  $\alpha_{sr} = 1,29 \pm 0,03$ .

Następnie korzystając ze wzoru (2) obliczono wartości siły tarcia  $T$  dla różnych wartości siły nacisku  $F_N$  i wykreślono na rysunku poniżej. W badanym zakresie sił nacisku

błąd względny tej wielkości jest przynajmniej 2-krotnie większy od błędu względnego parametru  $\alpha_{sr}$ , dlatego słupki błędów na wykresie poniżej uwzględniają tylko niepewność siły nacisku (odpowiadającą ciężarowi 1/4 kartki).



Linia ciągła została poprowadzona „na oko”, a jej współczynnik kierunkowy wynosi 0,35. Prosta ta dość dobrze oddaje zaobserwowany trend proporcjonalności maksymalnej siły tarcia do siły nacisku, co było postulowane w treści zadania, chociaż w prezentowanych powyżej danych można zauważyć pewne odchylenie od liniowości dla największych (w badanym zakresie) sił nacisku na jednostkę powierzchni. Linie przerywane wyznaczają arbitralnie wybrany przedział, a połowa różnicy współczynników nachylenia tych linii została przyjęta jako niepewność wyznaczenia współczynnika nachylenia linii ciągłej. Ostatecznie uzyskano  $\mu = 0,35 \pm 0,03$ .