Rozwiązanie zadania 1

a) Ponieważ podłoga jest pozioma i nie występuje tarcie, pozioma składowa pędu jest zachowana

$$mv_0 = mv_1 + mv_1, \tag{1}$$

gdzie v_1 jest końcową prędkością wózka oraz pochylni w rozważanym przypadku. Ponieważ nie ma tarcia i oporów powietrza, energia mechaniczna jest zachowana, czyli

$$\frac{m}{2}v_0^2 = 2\frac{m}{2}v_1^2 + mgh. \tag{2}$$

Stąd

$$v_0 = 2\sqrt{gh}. \tag{3}$$

b) Niech V_2 będzie prędkością pochylni, a v_2 - prędkością wózka, gdy toczy się po górnej powierzchni pochylni. Zasady zachowania pędu i energii przyjmują postać

$$mv = mv_2 + mV_2, \tag{4}$$

$$\frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}v_2^2 + \frac{m}{2}V_2^2 + mgh. \tag{5}$$

Podstawiając V_2 z równania (4) do równania (5) po prostych przekształceniach dostajemy

$$v_2^2 - vv_2 + gh = 0. \tag{6}$$

Stąd, wybierając rozwiązanie, w którym $v_2 > V_2$, otrzymamy

$$v_2 = \frac{v + \sqrt{v^2 - 4gh}}{2}, \; V_2 = \frac{v - \sqrt{v^2 - 4gh}}{2}. \tag{7}$$

Ruch wózka po oderwaniu się od pochylni jest rzutem poziomym z wysokości h z prędkością początkową v_2. Podczas takiego ruchu ruch poziomy i pionowy są od siebie niezależne. Ruch w pionie jest ruchem ze stałym przyspieszeniem g i zerową prędkością początkową, zatem

$$h = \frac{1}{2}gt_s^2, \tag{8}$$

gdzie t_s jest czasem spadania wózka. Stąd

$$t_s = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{9}$$

W trakcie spadania wózek oraz pochylnia mają stałe prędkości poziome (równe odpowiednio v_2 i V_2). Zatem do momentu upadku wózek oddali się od pochylni o

$$d = (v_2 - V_2) \cdot t_s. \tag{10}$$

Czyli szukana odległość wynosi

$$d = \sqrt{\frac{2h}{g}(v^2 - 4gh)}. \tag{11}$$

Zauważmy, że to rozwiązanie ma sens tylko gdy $v > 2\sqrt{gh} = v_0$.

Punktacja zadania 1.

Zasada zachowania pędu w przypadku a) (wzór (1) lub wzór (4) – jeśli został wykorzystany do wyznaczenia v_0) – 1 pkt.

Zasada zachowania energii w przypadku a) (wzór (2) lub wzór (5) – jeśli został wykorzystany do wyznaczenia v_0) – 1 pkt.

Prędkość szukana w przypadku a) (wzór (3)) – 1 pkt.

Zasada zachowania pędu w przypadku b), gdy wózek toczy się po poziomej części pochylni (wzór (1)) – 1 pkt.

Zasada zachowania energii w przypadku b), gdy wózek toczy się po poziomej części pochylni (wzór (5)) – 1 pkt.

Prędkość wózka oraz pochylni gdy wózek toczy się po jej górnej części (wzór (7)) – 1 pkt.

Czas spadania wózka (wzór (9) lub wzór równoważny) – 1 pkt.

Przedstawienie sposobu wyznaczenia odległości, na jaką wózek oddali się od pochylni (wzór (10) albo wzór lub rozumowanie równoważne) – 1 pkt.

Wynik końcowy (wzór (9)) – 2 pkt.

Rozwiązanie zadania 2.

Zgodnie z prawem Archimedesa

$$\left(V_1 + \frac{m}{\rho}\right)\rho_w g = mg, \tag{12}$$

gdzie V_1 jest objętością napompowanych balonów, a m/ρ – objętością materiału, z którego zbudowano statek.

Zatem balony należy napompować do objętości

$$V_1 = m/\rho_w - m/\rho \tag{13}$$

Potrzebna do tego praca to praca potrzebna do zwiększenia energii wewnętrznej powietrza oraz do rozepchnięcia wody:

$$W = C_V n\Delta T + p_1V_1 - p_0V_0, \tag{14}$$

gdzie n jest liczbą moli powietrza, ΔT – zmianą jego temperatury, p_1 – ciśnieniem na głębokości h, V_0 – początkową objętością powietrza. W powyższym wzorze p_1V_1 jest pracą jaką wykonujemy przeciwko ciśnieniu hydrostatycznemu wody, p_0V_0 to praca jaką wykonuje powietrze atmosferyczne nad powietrzem wpompowywanym do balonu.

Mamy $p_1 = p_0 + \rho_w gh$, $p_1V_1^{(C_V+R)/C_V} = p_0V_0^{(C_V+R)/C_V}$, stąd $V_0 = V_1\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{C_V/(C_V+R)}$. Z równania stanu gazu doskonałego $C_V n\Delta T = (p_1V_1 - p_0V_0)\frac{C_V}{R}$. Zatem

$$W = (p_1V_1 - p_0V_0)\frac{C_V+R}{R} = \tag{15}$$

$$= \left[(p_0+\rho_w gh) - p_0\left(\frac{p_0+\rho_w gh}{p_0}\right)^{\frac{C_V}{C_V+R}}\right](m/\rho_w - m/\rho)\frac{C_V+R}{R} \tag{16}$$

$$= \left[1 - \left(\frac{p_0+\rho_w gh}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_V+R}}\right](m/\rho_w - m/\rho)(p_0+\rho_w gh)\frac{C_V+R}{R} \tag{17}$$

$$\approx 2{,}5\cdot 10^6 \text{ kJ}. \tag{18}$$

Jest to więcej niż praca, jaką wykonałby dźwig podnosząc ten okręt.

$$\left(m - \frac{m}{\rho}\rho_w\right)gh \approx 1{,}3\cdot 10^6 \text{ kJ}.$$

Różnica wynika z faktu, że w trakcie podnoszenia statku część energii zużytej na napompowanie balonów teoretycznie można odzyskać (np. w trakcie podnoszenia objętość balonów wzrasta i powstaje niezrównoważona siła wyporu).

Punktacja zadania 2.

Objętość balonów (wzór (13)) – 2 pkt.

Ogólny wzór na pracę potrzebną do napełnienia balonów (wzór (14) lub równoważny) – 3 pkt.

Wykorzystanie równania adiabaty oraz równania stanu gazu doskonałego – 2 pkt.

Wynik końcowy (wzór (17) lub równoważny) – 2 pkt.

Wynik liczbowy (wzór (18)) – 1 pkt.

Rozwiązanie zadania 3.

Niech ładunek na wewnętrznej sferze wynosi q. Potencjał w obszarze pomiędzy sferami jest równy potencjałowi ładunku punktowego q zmodyfikowanemu o stałą wartość z powodu istnienia zewnętrznej sfery. Ponieważ na powierzchni wewnętrznej sfery ten potencjał ma być równy zero, otrzymujemy w obszarze $R/2 \leq r \leq R$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R/2}, \tag{19}$$

gdzie r jest odległością od wspólnego środka.

Potencjał na zewnątrz sfer jest równy potencjałowi ładunku punktowego $q+Q$ umieszczonego we wspólnym środku

$$V(r) = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{20}$$

Na powierzchni zewnętrznej sfery ($r = R$) oba powyższe wyrażenia muszą być równe (warunek ciągłości), skąd wynika

$$q = -\frac{Q}{2}. \tag{21}$$

Zatem potencjał elektryczny zewnętrznej sfery wynosi

$$V(R) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \tag{22}$$

W trakcie ruchu elektronu obowiązują: zasada zachowania całkowitej energii oraz zasada zachowania momentu pędu. Graniczny przypadek odpowiada sytuacji, gdy prędkość elektronu w odległości R od środka ma zerową składową radialną. Oznaczając przez v_0 początkową prędkość elektronu, a przez v_1 – końcową, mamy

$$m\frac{R}{2}v_0 = mRv_1, \tag{23}$$

$$\frac{mv_0^2}{2} + 0 = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Qe}{8\pi\epsilon_0 R}. \tag{24}$$

Z pierwszego równania $v_1 = v_0/2$, zatem

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_0^2}{8} + \frac{Qe}{8\pi\epsilon_0 R} \tag{25}$$

stąd

$$E_0 = \frac{Qe}{6\pi\epsilon_0 R}. \tag{26}$$

Punktacja zadania 3.

Potencjał elektryczny zewnętrznej sfery wraz z wyprowadzeniem (wzór (22)) – 3 pkt.

Zauważenie, że przypadek graniczny odpowiada sytuacji, gdy prędkość elektronu w odległości R od środka ma zerową składową radialną – 1 pkt.

Zasada zachowania momentu pędu zastosowana do początku i końca ruchu elektronu (wzór (23)) – 2 pkt.

Zasada zachowania energii zastosowana do początku i końca ruchu elektronu (wzór (24)) – 2 pkt.

Wynik końcowy (wzór (26)) – 2 pkt.

Rozwiązanie zadania numerycznego

Niezbędne wzory i rozważania wstępne

Gdy klocek ślizga sie względem tarczy, siła tarcia ma stałą wartość równą $mg\mu$ i jest skierowana przeciwnie do prędkości klocka względem punktu tarczy, nad którym znajduje się klocek w danej chwili. Oznacza to, że

$$\vec{F} = mg\mu \frac{\vec{V} - \vec{v}}{\left|\vec{V} - \vec{v}\right|}, \tag{27}$$

gdzie $\vec{v}$ jest prędkością klocka w danej chwili, natomiast $\vec{V}$ jest prędkością tarczy w punkcie, w którym znajduje sie klocek. Wybierając początek układu współrzędnych w środku tarczy i oznaczając współrzędne klocka w układzie nieobracającym się przez $(x,\ y)$ mamy

$$\vec{V} = (V_x,\ V_y) = (\omega y,\ \ -\omega x)\,. \tag{28}$$

Zatem równania Newtona dla ruchu klocka przyjmą postać

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \mu g \frac{\omega y - v_x}{\sqrt{(\omega y - v_x)^2 + (-\omega x - v_y)^2}}, \tag{29}$$

$$a_y = \frac{F_y}{m} = \mu g \frac{-\omega x - v_y}{\sqrt{(\omega y - v_x)^2 + (-\omega x - v_y)^2}}. \tag{30}$$

Te równania można rozwiązywać numerycznie korzystając ze wzorów przedstawionych w treści zadania.

Zauważmy, że gdy klocek spoczywa na obracającej się tarczy, to przyspieszenie musi być mniejsze lub równe maksymalnemu przyspieszeniu spowodowanemu tarciem

$$\omega^2 r \leq \mu g.$$

Oznacza to, że jeśli w jakimkolwiek momencie ruchu zajdzie

$$\frac{\mu g}{\omega^2 r} < 1, \tag{31}$$

czyli

$$r > \frac{\mu g}{\omega^2}, \tag{32}$$

to klocek na pewno w dalszej części ruchu nie zatrzyma się względem tarczy. Oznacza to również, że nie ma sensu szukanie granicznej wartości p dla $p < 1$.

Poniżej omówiono rozwiązanie wykorzystujące arkusz kalkulacyjny. Oczywiście wykorzystanie innych narzędzi do obliczeń numerycznych jest dopuszczalne.

Opis algorytmu i jego implementacji

W pierwszych wierszach arkusza do odpowiednio opisanych komórek wprowadzono wartości odpowiadające stałym g, μ oraz ω. Do tych komórek odwołują się wzory w komórkach odpowiadających F_x/m oraz F_y/m. Jedna z komórek odpowiada również początkowej odległości klocka od osi obrotu R.

W wierszu poniżej, w kolejnych komórkach wpisano nagłówki kolumn – nazwy określające dane, które będą znajdowały się w poszczególnych kolumnach: t, dt, v_x, v_y, V_x, V_y, $V_x - v_x$, $V_y - v_y$, $|V - v|$, F_x/m, F_y/m, x, y, r (nie wszystkie one są niezbędne do rozwiązania zadania). Oznaczając indeksem n (począwszy od 1) formuły w komórkach w wierszu n poniżej wiersza mamy (dla przejrzystości stosowana jest notacja matematyczna, będąca odpowiednikiem formuł wpisanych do arkusza)

Wiersz pierwszy (zerowy krok algorytmu):

$t_1 = 0$ $\quad dt_1 = 0,005$

$v_{x1} = 0$ $\quad v_{y1} = 0$

$V_{x1} = \omega y_1$ $\quad V_{y1} = -\omega x_1$

$(V_x - v_x)_1 = V_{x1} - v_{x1}$ $\quad (V_y - v_y)_1 = V_{y1} - v_{y1}$

$|V - v|_1 = \sqrt{(V_x - v_x)_1^2) + (V_y - v_y)_1^2}$

$(F_x/m)_1 = \mu g \cdot (V_x - v_x)_1/|V - v|_1$ $\quad (F_y/m)_1 = \mu g \cdot (V_y - v_y)_1/\,|V - v|_1$

$x_1 = 0$ $\quad y_1 = R$

$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ $\quad (\mu g/\,(\omega^2 r))_1 = \mu g/\,(\omega^2 r_1)$

Wiersz n+1 (n – ty krok algorytmu):

$t_{n+1} = t_n + dt_n$ $\quad dt_{n+1} = dt_n$

$v_{xn+1} = v_{xn} + (F_x/m)_n \cdot dt_n$ $\quad v_{yn+1} = v_{yn} + (F_y/m)_n \cdot dt_n$

$V_{xn+1} = \omega y_{n+1}$ $\quad V_{yn+1} = -\omega x_{n+1}$

$(V_x - v_x)_{n+1} = V_{xn+1} - v_{xn+1}$ $\quad (V_y - v_y)_{n+1} = V_{yn+1} - v_{yn+1}$

$|V - v|_{n+1} = \sqrt{(V_x - v_x)_{n+1}^2 + (V_y - v_y)_{n+1}^2}$

$(F_x/m)_{n+1} = \mu g \cdot (V_x - v_x)_{n+1}/|V - v|_{n+1}$ $\quad (F_y/m)_{n+1} = \mu g \cdot (V_y - v_y)_{n+1}/|V - v|_{n+1}$

$x_{n+1} = x_n + v_{xn} \cdot dt_n$ $\quad y_{n+1} = y_n + v_{yn} \cdot dt_n$

$r_{n+1} = \sqrt{x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2}$ $\quad (\mu g/\,(\omega^2 r))_{n+1} = \mu g/\,(\omega^2 r_{n+1})$

Aby móc ocenić dokładność obliczeń numerycznych, zawartość tak utworzonego arkusza skopiowano do drugiego arkusza w ramach tego samego skoroszytu (tego samego pliku), a następnie skopiowano tak ostatni wiersz, by w drugim arkuszu było dwa razy więcej kroków algorytmu, niż w pierwszym.

W trzecim arkuszu (w tym samym skoroszycie) utworzono wykres przedstawiający tor wyznaczony przez kolumny x oraz y z pierwszego arkusza oraz tor wyznaczony przez kolumny x oraz y z drugiego arkusza. W drugim arkuszu przyjęto wartość dt dwa razy mniejszą, niż wartość dt w pierwszym arkuszu.

Dodatkowo w drugim arkuszu umieszczono dane pozwalające na narysowanie okręgu o promieniu $r_{gr} = \mu g/\omega^2$ i umieszczono wykres tego okręgu (nazywanego dalej okręgiem granicznym) na wspólnym wykresie torów z arkusza pierwszego i drugiego.

Opis wykorzystania algorytmu do wyznaczenia granicznej wartości p

W obliczeniach długości wyrażono jako wielokrotności początkowej odległości od osi obrotu, zaś czas jako wielokrotności $1/\omega$. Odpowiada to przyjęciu $R = 1$ oraz $\omega = 1$. W obliczeniach zmieniano wartości μg wyrażone w zdefiniowanych powyżej jednostkach długości i czasu. Oczywiście możliwy jest inny wybór jednostek, w których prowadzone są obliczenia.

Początkowo w pierwszym arkuszu znajdowało się 5000 opisanych powyżej wierszy (kroków) a wartość kroku czasowego dt w tym arkuszu wynosiła $0,005$ (patrz uwaga o jednostkach powyżej), natomiast w drugim arkuszu znajdowało się 10000 wierszy (kroków) a wartość kroku czasowego dt wynosiła $0,0025$. W dalszych rozważaniach w obu arkuszach wartości wszystkich pozostałych parametrów (prócz dt) przyjmowano zawsze takie same, zatem można oczekiwać, że oba tory będą takie same.

Po wstępnej analizie wykresów otrzymanych dla μg w przedziale od 1,0 do 1,4 stwierdzono konieczność zmniejszenia kroku czasowego, gdyż wykresy z pierwszego arkusza oraz z drugiego arkusza znacznie się różniły.

Ostatecznie przyjęto w pierwszym arkuszu wartość kroku czasowego dt równą 0,001 zwiększając liczbę wierszy (kroków) do 10000, natomiast w drugim arkuszu $dt = 0,005$, a liczba wierszy (kroków) wynosiła 20000. Zmodyfikowano przy tym odpowiednio zakresy komórek, do których odwołują się wykresy.

Analizując tory dla różnych μg stwierdzono, że dla $\mu g \leq 1,14$ (a tym samym $p \leq 1,14$) mamy do czynienia z przypadkiem b) z treści zadania (patrz Wykres 1 odpowiadający $p = 1,14$), natomiast dla $\mu g \geq$ 1,15 (a tym samym $p \geq$ 1,15) – z przypadkiem a) z treści zadania (patrz Wykres 2 odpowiadający $p = 1{,}14$).

Na tej podstawie przyjęto, że graniczna wartość p wynosi $p_{\text{gr}} = 1{,}145 \pm 0,005$.

Wykresy 3 oraz 4 przedstawiają wymagane w treści zadania wykresy dla $p = 1{,}045$ oraz $p = 1{,}245$.

Dyskusja

Na wykresie 1 łatwo można zauważyć rozbieżność między torami opowiadającymi *dt większe* (arkusz 1) oraz *dt mniejsze* (arkusz 2), co pozornie sugeruje konieczność dalszego zmniejszenia kroku czasowego. Zauważmy jednak, że do miejsca, gdzie tory przekraczają okrąg graniczny, są one (wizualnie) nieodróżnialne. Ponieważ to przekroczenie okręgu granicznego decyduje o tym, czy mamy do czynienia z przypadkiem a) czy b), przyjęcie, że dla $p = 1{,}14$ mamy do czynienia z przypadkiem b) jest uzasadnione.

Zauważmy, że wzór (27) nie obowiązuje w przypadku, gdy klocek spoczywa względem tarczy. Zastosowanie go oznacza, że w naszym przybliżeniu klocek nigdy się nie zatrzyma względem tarczy – może wykonywać chaotyczne drgania wokół ustalonego punktu na tarczy. Taka sytuacja oznacza, że nasze rozwiązanie może być niestabilne numerycznie dla bardzo długich czasów. Rzeczywiście analiza wartości komórek $\left|\vec{V} - \vec{v}\right|$ w arkuszu kalkulacyjnym w przypadku $p = 1{,}5$ pozwala stwierdzić, że $\left|\vec{V} - \vec{v}\right| / (\omega r)$ osiąga w pewnym momencie wartość poniżej 10^{-4}, następnie wzrasta, a potem znowu maleje. Tak mała wartość $\left|\vec{V} - \vec{v}\right| / (\omega r)$ oznacza, że w rzeczywistości klocek przestał się ślizgać względem tarczy. Ponieważ w tym momencie spełniony jest warunek $\mu g > \omega^2 r$ (bo tor znajduje się wewnątrz okręgu granicznego), zatem dla $p = 1{,}5$ rzeczywiście mamy do czynienia z przypadkiem a). Podobna sytuacja występuje dla $p = 1{,}245$ (wykres 4).

Punktacja zadania numerycznego

Siła działająca na klocek (wzory (27) oraz (28)) – 2 pkt.

Opis algorytmu i jego implementacji – 2 pkt.

Opis wykorzystania algorytmu do wyznaczenia p_{gr} – 2 pkt.

Wartość graniczna p w zakresie od 1,1 do 1,2 – 1 pkt.

Wartość graniczna p w zakresie od 1,135 do 1,155 – 1 pkt.

Wykresy dla $p = (p_{\text{gr}} - 0{,}1)$ oraz $p = (p_{\text{gr}} + 0{,}1)$ – 2 pkt.