

LXI OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY III STOPNIA

CZEŚĆ TEORETYCZNA

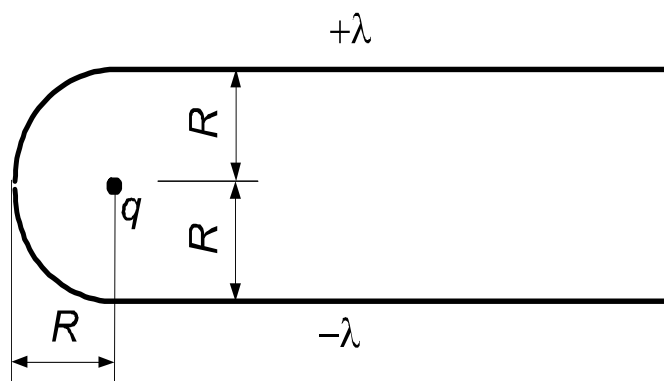
Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

Zadanie 1.

Długa nić jest naładowana równomiernie ładunkiem o gęstości liniowej $+\lambda$, a na jednym końcu zagięta w łuk o promieniu R i kącie 90° . Druga nić tego samego kształtu jest ustawiona symetrycznie (patrz rys.) i naładowana równomiernie ładunkiem o gęstości liniowej $-\lambda$. W środku okręgu, którego fragmentami są łuki, znajduje się punktowy ładunek q .

Wyznacz siłę działającą na ten ładunek.

Obie nici i ładunek leżą w jednej płaszczyźnie. Układ znajduje się w próżni.



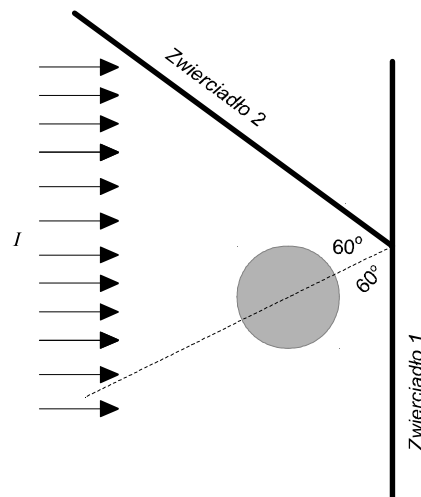
Zadanie 2.

Walec o długości L i promieniu R znajduje się w równoległym, skierowanym prostopadłe do jego osi i jednorodnym strumieniu światła o natężeniu I . Gdy za walcem, w pewnej odległości, większej od $0,8R$ od niego, prostopadle do strumienia promieniowania znajduje się zwierciadło, to równowagowa temperatura walca wynosi T_1 .

Jaka będzie równowagowa temperatura T_2 walca, gdy drugie zwierciadło, tworzące z pierwszym kąt 120° , umieścimy w takiej samej odległości od walca jak pierwsze, tak aby stykały się krawędzią (patrz rys.)?

Podaj wartość T_2 dla $I = 56700 \text{ W/m}^2$, $T_1 =$

720 K , $L = 100 \text{ mm}$, $R = 10,0 \text{ mm}$.

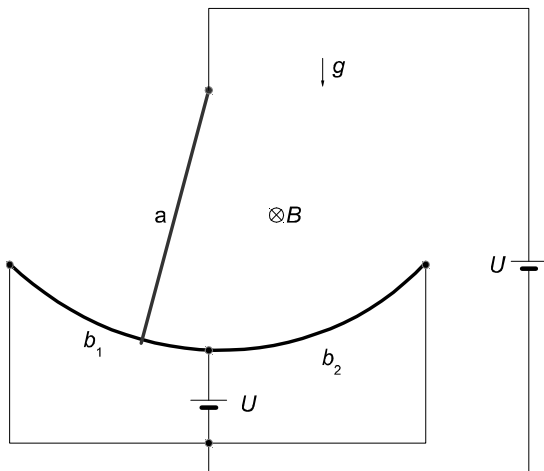


Walec jest ciałem doskonale czarnym o nieskończonym przewodnictwie cieplnym, a zwierciadła idealnie odbijają promieniowanie. Układ znajduje się w próżni z dala od innych źródeł promieniowania. Zwierciadła rozciągają się do nieskończoności, nie pochłaniają ani nie oddają ciepła, same nie promieniują - jedynie odbijają promieniowanie. Można również przyjąć, że wiązka światła w kierunkach poprzecznych do jej biegu rozciąga się do nieskończoności. Pomiń efekty dyfrakcyjne.

Zadanie 3 oraz wybrane stałe fizyczne na stronie 2.

Zadanie 3.

Rozważmy układ przedstawiony na rysunku.



Metalowy, cienki pręt a jest swobodnie zawieszony na jednym końcu, a drugi koniec ślizga się po drucie b_1 lub po drucie b_2 – patrz rysunek. Cały układ znajduje się w prostokątnym do jego płaszczyzny, jednorodnym, poziomym polu magnetycznym o indukcji B . Długość pręta wynosi l , jego masa m , a opór elektryczny r . Całkowity opór elektryczny każdego z drutów b_1 oraz b_2 wynosi R , a długość b . Opory pozostałych części obwodu, a również styku pręta a z drutem b_1 lub z drutem b_2 są zaniedbywane. Siła elektromotoryczna każdego z ogniw jest taka sama i wynosi U .

a) Pomiń siłę elektromotoryczną indukowaną przez poruszający się pręt. Jaki warunek musi

być spełniony, aby były możliwe wahania (drżania) z małymi odchyleniami pręta od pionu? Przyjmując, że ten warunek jest spełniony, wyznacz okres T takich wahań.

Podaj wartość liczbową T dla $B = 0,01$ T, $m = 0,01$ kg, $l = 0,5$ m, $b = 0,1$ m, $U = 30$ V, $R = 10$ Ω , $r = 10$ Ω , $g = 9,8$ m/s².

b) Opisz jakościowo ruch pręta przy uwzględnieniu siły elektromotorycznej indukowanej przez poruszający się pręt. Dla danych liczbowych z punktu a) oceń, czy pominięcie tej siły jest uzasadnione.

Zarówno w punkcie a) jak i b) pominiń tarcie, opór powietrza i samoindukcję obwodu.

Moment bezwładności pręta względem osi prostopadłej do niego i przechodzącej przez jego środek masy jest równy $I_{SM} = ml^2/12$.

Wybrane stałe fizyczne

Liczba Avogadro $N = 6,02 \cdot 10^{23}$.

Przenikalność elektryczna próżni

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ A}^2\text{s}^4 / (\text{kg m}^3).$$

Przenikalność magnetyczna próżni

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ V s} / (\text{A m}).$$

Stała Stefana-Boltzmannna

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} / (\text{m}^2\text{K}^4).$$

Rozwiązanie zadania 1.

Siła działająca na na ładunek ma cztery przyczynki:

- a) od prostego fragmentu pierwszej nici - biorąc pod uwagę warunki zadania, jest to siła pochodząca od naładowanej półprostej,
- b) od zaokrąglonego fragmentu pierwszej nici,
- c) od zaokrąglonego fragmentu drugiej nici,
- d) od prostego fragmentu drugiej nici.

Nich oś x będzie równoległa do nici, a oś y – prostopadła do nich (ale leżąca w płaszczyźnie układu).

a), d):

Prostopadła do nici składowa siły jaka działa od rozpatrywanych tu fragmentów nici jest taka sama jak siła działająca na rozpatrywany ładunek pochodząca od nieskończonej nici, zatem (przyjmując, że oś y jest skierowana "w górę")

$$F_{y, a+d} = -\frac{\lambda q}{2\pi R\epsilon_0}. \quad (1)$$

Poziome składowe sił pochodzących od obu rozpatrywanych tu fragmentów nici się równoważą, zatem

$$F_{x, a+d} = 0. \quad (2)$$

b), c)

Poziome składowe sił pochodzących od obu rozpatrywanych tu fragmentów nici się równoważą, zatem

$$F_{x, b+c} = 0.$$

Rozpatrzmy element o długości Δl zaokrąglonego fragmentu "górnej" nici. Jeśli kąt między osią element – ładunek punktowy a osią x wynosi α to pochodząca od tego fragmentu pionowa składowa siły działającej na ładunek wynosi

$$\Delta F_{y, b} = -\frac{q\lambda\Delta l}{4\pi R^2\epsilon_0} \sin \alpha = -\frac{q\lambda\Delta l_x}{4\pi R^2\epsilon_0}, \quad (3)$$

gdzie $\Delta l_x = \Delta l \sin \alpha$ jest długością rzutu rozpatrywanego elementu nici na oś x . Aby otrzymać całkowitą "pionową" składową siły w przypadku b) musimy wysumować po wszystkich Δl_x co daje

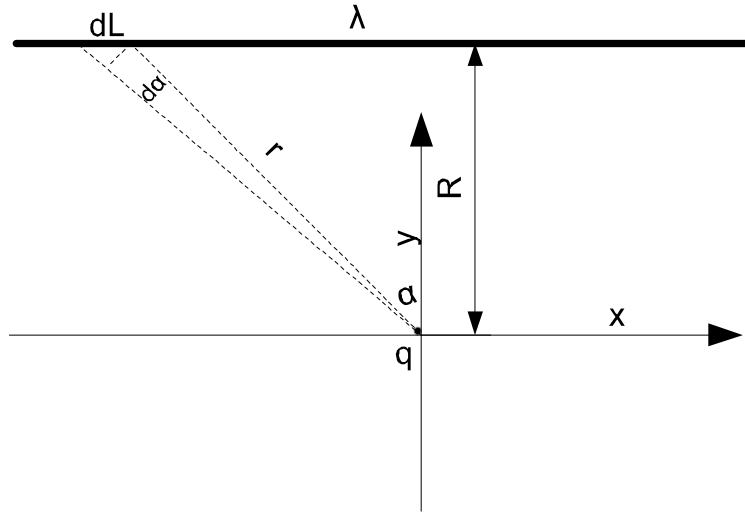
$$F_{y, b} = -\frac{q\lambda R}{4\pi R^2\epsilon_0}. \quad (4)$$

Postępując analogicznie w przypadku c) otrzymamy $F_{y, c} = F_{y, b}$, zatem

$$F_{y, b+c} = -\frac{q\lambda}{2\pi R\epsilon_0}. \quad (5)$$

Dodając otrzymane przyczynki, otrzymamy, że całkowita siła działająca na ładunek wynosi

$$\vec{F} = -\frac{\lambda q}{2\pi R\epsilon_0} \vec{e}_y - \frac{\lambda q}{2\pi R\epsilon_0} \vec{e}_y = -\frac{\lambda q}{\pi R\epsilon_0} \vec{e}_y. \quad (6)$$



Powyższe oznacza, że siła pochodząca od prostego kawałka nici jest równa sile pochodzącej od kawałka pochodzącego od kawałka zakrzywionego. Nie jest to przypadek. Rozważmy dF_y składową y siły działającej na ładunek q pochodzącą od fragmentu nici długości dL (patrz rysunek)

Z prawa Coulomba (patrz oznaczenia na rysunku)

$$dF_y = -\frac{q\lambda dL}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha.$$

Uwzględniając małość dL i $d\alpha$ geometrii wynika

$$r = R / \cos \alpha,$$

$$dL = r d\alpha / \cos \alpha = R d\alpha / \cos^2 \alpha.$$

Zatem

$$dF_y = -\frac{q\lambda R d\alpha}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \alpha.$$

A to jest siła pochodząca od zawartego między kątami α a $d\alpha$ fragmentu nici zakrzywionej w okrąg o promieniu R ze środkiem w punkcie q . Dodając przyczynki od różnych $d\alpha$ otrzymujemy, że pionowa składowa siły pochodzącej od ćwiartki okręgu jest równa pionowej składowej siły pochodzącej od półokręgu (dla układu jak z treści zadania). Ten fakt wielu uczestników wykorzystywało w rozwiązaniu (wiedząc to można np. zamiast górnego fragmentu nici z treści zadania rozpatrywać prostą, nieskończoną nić lub nić ułożoną w półokrąg), ale niestety tylko niektórzy przedstawili uzasadnienie.

Rozwiązanie zadania 2.

W pierwszym przypadku na walec pada promieniowanie o mocy $P_{1pad} = 2RLI$. Gdy nie ma lustra, to wypromieniowuje on moc $P_0 = \sigma T_1^4 S$, gdzie $S = 2\pi(R^2 + RL)$ jest jego powierzchnią. Gdy za walcem znajduje się lustro, to część promieniowania powraca do walca. Oznaczmy ułamek powracającego promieniowania przez α . Warunek równowagi w pierwszym przypadku ma postać

$$P_{1,pad} = P_1 = (1 - \alpha) P_0$$

czyli

$$2RLI = (1 - \alpha) \sigma T_1^4 S. \quad (7)$$

Stąd

$$\alpha = 1 - \frac{2RLI}{\sigma T_1^4 S}.$$

W drugim przypadku na walec światło pada zarówno bezpośrednio, jak i po odbiciu od drugiego lustra. Jeśli odległość walca od każdego z lusterek wynosi d , to pionowa (orientacja zgodnie z rysunkiem) odległość osi walca będącego odbiciem od drugiego lustra od osi realnego walca wynosi

$$y = 2(R + d) \sin 60^\circ > 2R, \quad (8)$$

gdzie uwzględniliśmy, że $d > 0,8d$. Oznacza to, że realny walec nie zasłania wiązki drugiego odbicia. Jednocześnie fragment wiązki padający na to odbicie w całości mieści się w drugim zwierciadle. Zatem w drugim przypadku na realny walec pada dodatkowo wiązka odbita o mocy P_1 , czyli w sumie moc światła padającego na walec wynosi $2P_1$.

Z prostej geometrii wynika, że odległość między krawędzią styku lusterek, a prostopadłym rzutem osi walca na każde z nich wynosi

$$D_{kr-rzut} = (R + d) \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ > R,$$

gdzie znowu uwzględniliśmy, że $d > 0,8d$. Oznacza to, że każdy fragment połowy walca zwróconej do lustra "widzi" każdy fragment swojego odbicia, czyli tyle samo co w pierwotnym przypadku z jednym lustrem. Ale ponieważ teraz mamy dwa odbicia, do walca powraca dwa razy większy ułamek wypromieniowanej mocy niż w pierwszym przypadku, czyli

$$4RLI = (1 - 2\alpha) \sigma T_2^4 S. \quad (9)$$

Stąd

$$T_2 = \sqrt[4]{\frac{4RLI}{\left(2\frac{2RLI}{\sigma T_1^4 S} - 1\right) \sigma S}} = \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1}{T_1^4} - \frac{\sigma \pi (R+L)}{2LI}}} = \frac{T_1}{\sqrt[4]{1 - \frac{\sigma T_1^4 \pi (R+L)}{2LI}}}. \quad (10)$$

Niestety do danych liczbowych w treści zadania wkraśl się błąd, powodujący, że rozważany powyżej współczynnik α przyjmuje niefizyczną, ujemną wartość. Zawodnicy którzy zauważyli ten fakt, dostali pełną liczbę punktów za część liczbową zadania niezależnie od tego, czy wyznaczyli numeryczną wartość T_2 .

Rozwiązanie zadania 3.

a) Niech pręt a będzie odchylony o kąt α od pionu (α jest dodatnie dla odchyleń w prawo, ujemne – dla odchyleń w lewo). Moment siły grawitacji (względem osi obrotu pręta) starający się przywrócić jego pionową pozycję wynosi

$$M_{\text{graw}} = -\frac{l}{2} mg \sin \alpha \approx -\frac{mgl}{2} \alpha, \quad (11)$$

gdzie znak "–" oznacza, że moment siły działa przeciwnie do wychylenia.

Gdy pręt jest pionowy, nie płynie przez niego prąd (sumaryczne napięcie na jego końcach jest równa $U - U = 0$), a przez każdy z drutów b_1 oraz b_2 płynie prąd o natężeniu $I_{b0} = U/R$ – w lewo przez drut b_1 oraz w prawo przez drut b_2 . Gdy pręt jest odchylony o kąt α od pionu, to opór między punktem styczności pręta z drutem, a punktem łączącym druty b_1 i b_2 wynosi $\frac{|\alpha|l}{b}R$. Zatem spadek napięcia na rozważanym fragmencie drutu wynosi

$$U_b = \frac{|\alpha|l}{b} RI_b,$$

gdzie I_b jest prądem płynącym przez ten fragment. Dla małych kątów α , w pierwszym przybliżeniu $I_b = I_{b0} = U/R$, a zatem w tym przybliżeniu otrzymujemy

$$U_b = \frac{|\alpha|l}{b} U. \quad (12)$$

Powyższe napięcie jest jednocześnie napięciem między punktem zawieszenia pręta, a punktem jego styczności z drutem, zatem przez pręt płynie w dół prąd o wartości

$$I = \frac{U_b}{r} \approx |\alpha| \frac{lU}{br}. \quad (13)$$

Ten sam wzór można otrzymać wychodząc od ścisłych równań – np. dla oczka obejmującego pręt i oba źródła oraz dla "małego" oczka obejmującego źródło i drut, z którym styka się pręt:

$$Ir - I_b \frac{|\alpha|l}{b} R = U - U, \quad (14)$$

$$I_b \frac{|\alpha|l}{b} R + (I_b + I) \left(R - \frac{|\alpha|l}{b} R \right) = U. \quad (15)$$

Rozwiązując ten układ równań dostaniemy

$$I = \frac{\frac{|\alpha|l}{b} U}{r + \frac{|\alpha|l}{b} R - \left(\frac{|\alpha|l}{b} \right)^2 R}, \quad (16)$$

co dla małych α daje wzór (13).

Ponieważ pręt znajduje się w polu magnetycznym, działa na niego siła elektrodynamiczna o wartości IlB . Wektor tej siły ta jest efektywnie przyłożony w środku pręta, prostopadły do niego i do wektora \vec{B} , a zwrot (dla dodatnich wartości parametrów) jest skierowany w prawo. Moment tej siły względem osi obrotu pręta wynosi

$$M_I = IlB \frac{l}{2} = |\alpha| \frac{l^3 UB}{2br}.$$

Moment ten nie zależy od tego, w którą stronę pręt jest odchylony. Zatem całkowity moment siły, działający na pręt a wynosi:

$$M = \begin{cases} - \left(\frac{mgl}{2} + \frac{UBl^3}{2br} \right) \alpha & \text{dla } \alpha \leq 0, \\ - \left(\frac{mgl}{2} - \frac{UBl^3}{2br} \right) \alpha & \text{dla } \alpha > 0. \end{cases} \quad (17)$$

Z twierdzenia Steinera moment bezwładności pręta względem osi obrotu wynosi $ml^2/12 + m(l/2)^2 = ml^2/3$. Ze wzoru na okres drgań oscylatora harmonicznego otrzymujemy wartości półokresów odpowiadających odchyleniu odpowiednio w lewo i w prawo

$$T_{L1/2} = \pi \sqrt{\frac{ml^2/3}{\frac{mgl}{2} + \frac{UBl^3}{2br}}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{3g}{2l} + \frac{3lUB}{2brm}}}, \quad (18)$$

$$T_{P1/2} = \pi \sqrt{\frac{ml^2/3}{\frac{mgl}{2} - \frac{UBl^3}{2br}}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{3g}{2l} - \frac{3lUB}{2brm}}}. \quad (19)$$

Stąd całkowity okres drgań wynosi

$$T = \pi \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{3g}{2l} + \frac{3lUB}{2brm}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{3g}{2l} - \frac{3lUB}{2brm}}} \right) \quad (20)$$

$$\approx 1,6 \text{ s.} \quad (21)$$

Zauważmy, że okres w przypadku $B = 0$ wynosi

$$T_{B=0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3g}{2l}}} \approx 1,2 \text{ s.}$$

O drganiach pręta wokół jego pionowego położenia możemy mówić tylko jeśli

$$\frac{g}{l} > \frac{lUB}{brm}, \quad (22)$$

w przeciwnym przypadku pionowe położenie pręta nie jest stabilnym położeniem równowagi.

b) Siła elektromotoryczna indukowana przez ruch pręta wynosi

$$\mathcal{E} = -B \frac{l^2}{2} \frac{d\alpha}{dt}. \quad (23)$$

Powoduje ona przepływ prądu o wartości $I_{\text{ind}} = \mathcal{E} / \left(r + \frac{l\alpha}{b} R \right) \approx \mathcal{E} / r$. Ten prąd powoduje, że na pręt działa moment siły

$$M_{\text{ind}} = BI_{\text{ind}} l^2 / 2 = -B^2 \frac{l^4}{4r} \frac{d\alpha}{dt}. \quad (24)$$

Ten moment siły spowalnia ruch pręta, a zatem powoduje że: i) drgania stają się tłumione, ii) okres drgań ulega zwiększeniu.

Jeśli $T_{1/2}$ jest półokresem drgań, a amplituda wynosi α_0 , to średnią wartość prędkości kątowej można oszacować przez $2\alpha_0/T_{1/2}$, a średnią wartość tego momentu siły przez

$$M_{\text{ind},sr} = B^2 \frac{l^4}{4r} \frac{2\alpha_0}{T_{1/2}}. \quad (25)$$

Z drugiej strony średnią wartość momentu siły przywracającego pionowe położenie pręta, możemy zgodnie z wzorami (17) oszacować przez

$$M_{sr} = \left(\frac{mgl}{2} \pm \frac{UBl^3}{2br} \right) \alpha_0,$$

gdzie osobno rozważamy odchylenia w prawo (znak minus) i w lewo (znak plus). Z drugiej strony, zgodnie z naszymi wzorami

$$T_{1/2} = \pi \sqrt{\frac{ml^2/3}{\frac{mgl}{2} \pm \frac{UBl^3}{2br}}}$$

Stosunek tych dwóch momentów szacuje nam dokładność przybliżenia (osobno dla odchylen w lewo i w prawo)

$$\frac{M_{\text{ind},sr}}{M_{sr}} = B^2 \frac{l^4}{2\pi r} \sqrt{\frac{3}{\left(\frac{mgl}{2} \pm \frac{UBl^3}{2br} \right) ml^2}}. \quad (26)$$

Wybierając mniej korzystny przypadek (znak minus), otrzymamy, że

$$\frac{M_{\text{ind},sr}}{M_{sr}} = B^2 \frac{l^3}{\pi r} \sqrt{\frac{3}{2 \left(mgl - \frac{UBl^3}{br} \right) m}} \approx 5 \cdot 10^{-5}. \quad (27)$$

Powyższa wartość oznacza, że pominięcie siły elektromotorycznej indukowanej przez ruch pręta jest uzasadnione. Oczywiście sposób szacowania może się różnić od powyższego i można również w pośrednich rachunkach operować na liczbach, a nie na symbolach.

Uwaga: część zawodników porównywała siłę elektromotoryczną indukowaną przez ruch pręta z napięciem wytworzony na jego końcach. Nie jest to w pełni poprawne podejście, gdyż nawet w przypadku $U = 0$ rozważany efekt może być pomijalny. Z drugiej strony gdy $mgl - \frac{UBl^3}{br} \approx 0$ (ale dodatnie), to pominięcie rozważanego efektu może być niedopuszczalne nawet jeśli wyindukowany prąd płynący przez pręt jest znacznie mniejszy od prądu wywołanego przez źródła napięcia.