

LX OLIMPIADA FIZYCZNA

ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA

Rozwiązania zadań I stopnia należy przysyłać do **Okręgowych Komitetów Olimpiady Fizycznej** w terminie do 15 listopada b.r.. O kwalifikacji do zawodów II stopnia będzie decydować suma punktów uzyskanych za rozwiązania zadań.

Szczegóły dotyczące regulaminu oraz organizacji Olimpiady można znaleźć na stronie internetowej www.kgof.edu.pl.

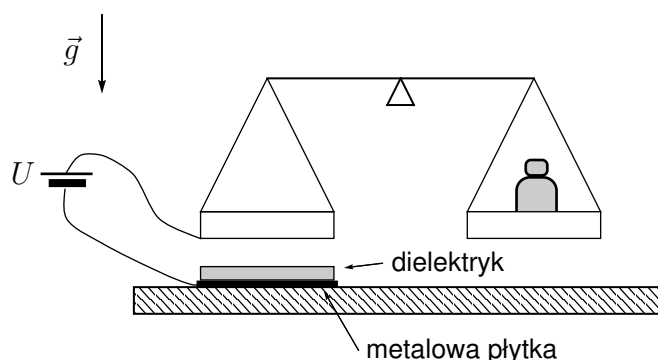
Uwaga: Rozwiązanie każdego zadania powinno być napisane na oddzielnym arkuszu papieru podaniowego. Na każdym arkuszu należy umieścić: imię, nazwisko i adres autora pracy, nazwę i adres szkoły, klasę oraz imię i nazwisko nauczyciela fizyki. Do pracy należy dołączyć kopertę zaadresowaną do siebie.

ZADANIA TEORETYCZNE

Przesłać należy rozwiązania trzech (i tylko trzech) dowolnie wybranych zadań teoretycznych. Za każde z trzech zadań można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

Zadanie T1.

Tomek posiada wagę laboratoryjną, ale zgubił do niej odważniki. Postanowił pod szalką umieścić metalową płytkę o promieniu r (równym promieniowi denka szalki) i podłączyć szalkę i płytkę do źródła o regulowanym napięciu (patrz rysunek). Aby nie dochodziło do zwarcia, Tomek przykleił do górnej powierzchni płytki warstwę dielektryka o grubości d_1 ($d_1 \ll r$) i stałej dielektrycznej ϵ_w . Gdy waga jest w położeniu równowagi, odległość między spodem szalki a dielektrykiem wynosi d_2 ($d_2 \ll r$).



Jakie powinno być napięcie U , aby waga była w równowadze, gdy na drugiej szalce leży przedmiot o masie m ? Podaj liczbową wartość U dla $r = 5\text{cm}$, $d_1 = d_2 = 1\text{mm}$, $m = 1\text{g}$, $\epsilon_w = 3$.

Szalki są metalowe, a ich dno jest płaskie. Płytką pod szalką jest przymocowana do podłoża. Przyspieszenie ziemskie $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, przenikalność elektryczna próżni $\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$.

Zadanie T2.

W maszynie parowej woda o temperaturze początkowej $t_0 = 20^\circ\text{C}$ jest podgrzewana do temperatury $t_1 = 120^\circ\text{C}$, przy czym jej ciśnienie wzrasta do wartości $p_1 = 2,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. W temperaturze t_1 i ciśnieniu p_1 zachodzi przemiana wody w parę. Powstała para przesuwają tłok, a następnie jest wypuszczana do otoczenia o ciśnieniu $p_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Oblicz maksymalną sprawność tej maszyny w dwóch przypadkach:

- para przesuwająca tłok ma stałe ciśnienie p_1 , a potem jest wypuszczana do atmosfery;
- maszyna pracuje dwuetapowo: najpierw para przesuwają tłok jak w pkt. a), a następnie przesuwając tłok (ten sam lub inny – zależnie od rozwiązań konstrukcyjnych) ulega adiabatycznemu rozprężeniu aż osiągnie temperaturę $t_w = 100^\circ\text{C}$, po czym wylatuje do atmosfery.

Ciepło parowania wody temperaturze t_1 (i pod ciśnieniem p_1) wynosi $q_1 = 2,2 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$, ciepło właściwe wody jest równe $c_w = 4,2 \cdot 10^3 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$, ciepło właściwe pary wodnej przy stałym ciśnieniu $c_p = 2,0 \cdot 10^3 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$. Parę wodną potraktuj jako gaz doskonały. Uniwersalna stała gazowa jest równa $R = 8,3 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$.

Zadanie T3.

Kulka o promieniu R , poruszająca się z prędkością v po poziomej podłodze, uderza w krawędź progu o wysokości h (patrz rysunek). Zderzenie jest doskonale sprężyste i trwa bardzo krótko.

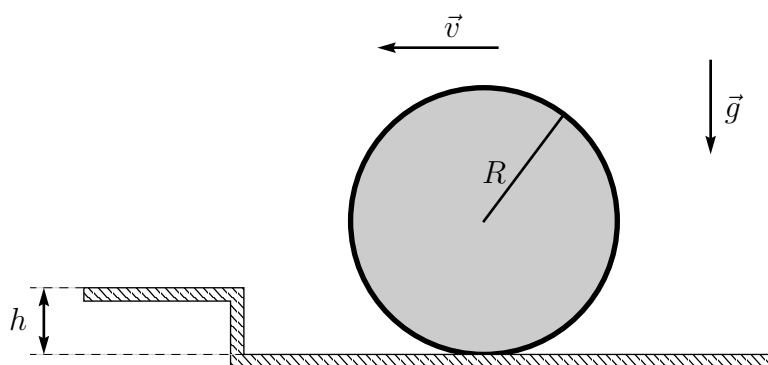
Jaki warunek (lub warunki) powinno spełniać v , aby kulka po uderzeniu w próg "wskoczyła" znajdująca się za nim część podłogi, nie zderzając się powtórnie z krawędzią progu? Pomiń tarcie i opór powietrza.

Sprawdź, czy ten warunek jest spełniony dla następujących wartości parametrów:

- $R = 0,02 \text{ m}$, $h = R/2$, $v = 1 \text{ m/s}$;
- $R = 0,02 \text{ m}$, $h = R/4$, $v = 3 \text{ m/s}$;
- $R = 0,02 \text{ m}$, $h = R/8$, $v = 0,5 \text{ m/s}$;
- $R = 0,04 \text{ m}$, $h = R/16$, $v = 0,3 \text{ m/s}$.

Przyjmij, że przyspieszenie ziemskie $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Prędkość \vec{v} jest prostopadła do krawędzi progu.

Uwaga: Gdy $h < R$, wygodnie jest wprowadzić kąt α , taki że $h = R(1 - \cos \alpha)$.



Zadanie T4. NUMERYCZNE.

Statek piracki wystrzelił z armaty (falkonetu) w kierunku statku przeciwnika żelazną kulę o promieniu $r = 2,5$ cm. Zaraz po opuszczeniu lufy kula miała prędkość $v = 300$ m/s skierowaną pod kątem α do poziomu. Następnie kula poruszała się w powietrzu, a jedynymi siłami na nią działającymi były: stała siła grawitacji oraz siła oporu powietrza skierowana w kierunku przeciwnym do kierunku poruszania się kuli, o wartości proporcjonalnej do kwadratu prędkości

$$\vec{F}_R = -\frac{1}{2} \kappa S \rho_p v^2 \frac{\vec{v}}{v},$$

gdzie \vec{v} jest prędkością kuli, a κ – stałym współczynnikiem oporu aerodynamicznego, który dla kuli w przybliżeniu jest równy 0,45. S jest powierzchnią rzutu obiektu (kuli) na płaszczyznę prostopadłą do kierunku ruchu, ρ_p – gęstością powietrza.

Posługując się komputerem (np. wykorzystując znany ci język programowania lub arkusz kalkulacyjny) lub programowalnym kalkulatorem, wyznacz kąt, przy którym zasięg strzału jest największy. Zastosuj poniższy schemat:

1. Zaproponuj dla tego problemu i uzasadnij schemat różnicowy oparty na metodzie Eulera (patrz PRZYKŁAD) lub innej metodzie numerycznej.
2. Wykreśl tory dla $\alpha = 30^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, oraz $\alpha = 60^\circ$.
3. Wykreśl zależność zasięgu od kąta i na tej podstawie oszacuj kąt α_{max} , dla którego zasięg jest największy. Podaj ten zasięg.

Przyjmij gęstość żelaza $\rho_{Fe} = 7900$ kg/m³ i powietrza $\rho_p = 1,2$ kg/m³ przyspieszenie ziemskie $g = 9,8$ m/s². Punkt upadku kuli znajduje się na tej samej wysokości, co punkt jej wystrzelenia. Pomiń krzywiznę Ziemi.

PRZYKŁAD

Algorytm różnicowy wykorzystujący schemat Eulera dla jednowymiarowego problemu spadku swobodnego z warunkami początkowymi $y(0) = h$ oraz $v(0) = 0$ jest następujący:

Dla małego Δt , równania ruchu przybliżamy przez

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = v, \quad (1)$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{F}{m} = -g. \quad (2)$$

Stąd algorytm ma następującą postać:

- Inicjalizacja: $y_0 = h, v_0 = 0$.
- Krok algorytmu: dopóki $y_n > 0$, powtarzaj

$$y_{n+1} = y_n + v_n \Delta t, \quad (3)$$

$$v_{n+1} = v_n - g \Delta t. \quad (4)$$

Powyższy schemat należy uogólnić na przypadek dwuwymiarowy i uwzględnić konkretną postać siły występującej w rozważanym zagadnieniu.

Teoretycznie dla odpowiednio małego Δt , uzyskane w ten sposób rozwiązanie numeryczne dowolnie dokładnie przybliży rozwiązanie wyjściowego zagadnienia. Jednak komputer (lub kalkulator) przeprowadza obliczenia ze skończoną dokładnością i zbyt mała wartość Δt może być przyczyną dużych błędów.

W praktyce długość kroku czasowego Δt można ustalić np. żądając, by po zmniejszeniu jej dwukrotnie, zmiany szukanych parametrów były w granicach z góry założonej dokładności (np. 1%). Poprawność schematu możesz sprawdzić na przykładzie rzutu ukośnego bez oporu.

ZADANIA DOŚWIADCZALNE

Przesłać należy rozwiązania dwóch (i tylko dwóch) dowolnie wybranych zadań doświadczalnych. Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 40 punktów.

Zadanie D1.

Siły oporów ruchu mogą mieć złożoną postać. Zbadaj, który związek najlepiej opisuje ruch roweru (z rowerzystą) jadącego po równej, twardej nawierzchni:

- a) siła oporu nie zależy od prędkości $F_{op}(v) = C$,
- b) siła oporu jest proporcjonalna do prędkości $F_{op}(v) = Av$,
- c) siła oporu jest proporcjonalna do kwadratu prędkości $F_{op}(v) = Bv^2$.

Wyznacz odpowiednią stałą dla zakresu prędkości 0 – 20 km/h.

Możesz użyć:

- roweru z prędkościomierzem,
- kamery (np. w telefonie komórkowym),
- taśmy mierniczej,
- stopera.

Uwaga: Podczas pomiarów pamiętaj o bezpieczeństwie rowerzysty i innych osób.

Zadanie D2.

2. Woda jest przezroczysta w widzialnym zakresie widma, ale już w bliskiej podczerwieni silnie absorbuje promieniowanie elektromagnetyczne. Mając do

dyspozycji:

- wysokie naczynie szklane (menzurkę, wazon) z wodą,
- linijkę,
- pilot od telewizora,
- aparat cyfrowy oraz program do obróbki zdjęć,

zbadaj zależność natężenia światła I_t wysyłanego przez podczerwoną diodę pilota i przechodzącego przez wodę od grubości warstwy wody L . Wyznacz współczynnik α we wzorze

$$I_t = I_0 e^{-\alpha L}.$$

Uwaga: w typowym aparacie cyfrowym stosuje się korekcję skali natężenia - można przyjąć, że rejestrowana do pliku wartość sygnału I_{PLIK} jest związana z natężeniem światła padającego na piksel matrycy I_{PIKSEL} formułą

$$I_{\text{PLIK}} = I_{\text{PIKSEL}}^{0,7}.$$

Zadanie D3.

Plastikowa rura może działać jak „dźwiękowód”. Zbadaj, jak wygląda transmisja takiego „dźwiękowodu” w funkcji częstości fali akustycznej. Transmisja T jest zdefiniowana jako stosunek natężenia dźwięku na wyjściu A_{out} do natężeniu dźwięku na wejściu A_{in} „dźwiękowodu”:

$$T(\omega) = \frac{A_{\text{out}}}{A_{\text{in}}}$$

Masz do dyspozycji:

- komputer z kartą dźwiękową połączoną do głośnika i mikrofonu,
- programy komputerowy `Generator` pozwalający wysyłać na wyjście karty dźwiękowej dowolne przebiegi napięcia
- program komputerowy `Oscyloskop` pozwalający odczytywać przebiegi napięcia na wejściu mikrofonowym karty dźwiękowej,
- plastikową rurę (np. kanalizacyjną) o średnicy ok. 5 cm i długości ok. 2 m.

LX OLIMPIADA FIZYCZNA**Rozwiązania zadań****ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA****Zadanie T1.**

Dno szalki i płytka tworzą kondensator płaski o powierzchni $S = \pi r^2$ i odległości między okładkami d . Uwzględniając, że $d_1, d_2 \ll r$, pole elektryczne wewnątrz takiego kondensatora jest prostopadłe do okładek. Jeśli na płytce znajduje się ładunek Q , to z prawa Gaussa wynika, że natężenie pola elektrycznego między denkiem szalki, a płytką wynosi w powietrzu

$$E_2 = Q / (\epsilon_0 S), \quad (5)$$

a wewnątrz dielektryka

$$E_1 = Q / (\epsilon_0 \epsilon_w S). \quad (6)$$

Oznacza to, że związek między napięciem U i ładunkiem Q jest dany wzorem

$$U = (d_1/\epsilon_w + d_2) Q / (\epsilon_0 S). \quad (7)$$

Nad górną okładką (denkiem szalki) pole elektryczne jest równe 0, a pod nią wynosi E_2 i różnica między tymi wartościami jest wynikiem symetrycznego względem tej okładki pola elektrycznego wytworzonego przez nią samą. Zatem okładka znajduje się w zewnętrznym polu elektrycznym o natężeniu $E_2/2$. Z tego wynika, że wartość działającej na nią siły elektrostatycznej jest równa

$$F = \frac{QE_2}{2} = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2(d_1/\epsilon_w + d_2)^2}. \quad (8)$$

Ta siłą powinna równoważyć ciężar przedmiotu położonego na drugiej szalce, zatem w stanie równowagi

$$\frac{\epsilon_0 S U^2}{2(d_1/\epsilon_w + d_2)^2} = mg, \quad (9)$$

stąd

$$U = \left(\frac{d_1}{\epsilon_w} + d_2 \right) \sqrt{\frac{2mg}{\pi r^2 \epsilon_0}} \quad (10)$$

$$\approx 706 \text{ V}. \quad (11)$$

Punktacja	
Pole elektryczne w powietrzu wewnątrz kondensatora (wzór (5) lub równoważny)	1 pkt.
Pole elektryczne w dielektryku (wzór (6) lub równoważny)	1 pkt.
Związek między napięciem i ładunkiem (wzór (7) lub równoważny)	2 pkt.
Siła elektrostatyczna przyciągająca szalkę (wzór (8) lub równoważny)	2 pkt.
Warunek równowagi szalki (wzór (9) lub równoważny)	1 pkt.
Szukane napięcie (wzór (10) lub równoważny)	2 pkt.
Wynik liczbowy (wzór (11) lub równoważny)	1 pkt.

Zadanie T2.

Ilość ciepła potrzebna do wytworzenia masy m pary wodnej o temperaturze t_1 i ciśnieniu p_1 wynosi

$$Q = c_w m (t_1 - t_2) + q_1 m. \quad (12)$$

Zgodnie z równaniem stanu gazu doskonałego, objętość wytworzonej pary wynosi

$$V_1 = \frac{NRT_1}{p_1} = \frac{mRT_1}{Mp_1}, \quad (13)$$

gdzie N jest liczba moli gazu, $M = 18 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ – masą molową H_2O , a $T_1 = t_1 + 273,15 \text{ K}$ – temperaturą absolutną. Praca wykonana przez parę jest równa $p_1 V_1$, praca potrzebna do wypchnięcia powietrza atmosferycznego wynosi $p_0 V_1$, zatem maksymalna praca użyteczna wykonana przez tłok w pkt. a) jest równa

$$W_a = (p_1 - p_0) V_1 = (p_1 - p_0) \frac{mRT_1}{Mp_1}, \quad (14)$$

przy czym w powyższych rozważaniach pominęliśmy zmianę objętości wody w porównaniu z objętością powstałej z niej pary.

Sprawność maszyny w przypadku a) wynosi

$$\eta_a = \frac{W_a}{Q} = \frac{(p_1 - p_0) \frac{RT_1}{Mp_1}}{c_w (t_1 - t_0) + q_1}. \quad (15)$$

Podstawiając dane liczbowe dostajemy

$$\eta_a \approx 0,035. \quad (16)$$

W przypadku b) para wykonuje dodatkową pracę w trakcie rozprężania adiabaticznego do objętości V_2 , odpowiadającej temperaturze T_w . Korzystając z równania stanu gazu doskonałego możemy równanie adiabaty $pV^\gamma = \text{const}$, gdzie

$\gamma = c_p/c_V$, $c_V = c_p - R/M \approx 1,5 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ zapisać w równoważnej postaci $TV^{\gamma-1} = \text{const}$. **Zatem:**

$$V_2 = V_1 \left(\frac{T_1}{T_w} \right)^{1/(\gamma-1)} = \frac{mRT_1}{Mp_1} \left(\frac{T_1}{T_w} \right)^{1/(\gamma-1)}. \quad (17)$$

Ponieważ proces jest adiabatyczny, praca wykonana przez parę jest równa zmniejszeniu jej energii wewnętrznej $c_V m (T_1 - T_w)$; część tej pracy, równa $p_0 (V_2 - V_1)$, jest wykorzystana na wypchnięcie powietrza atmosferycznego. Zatem praca użyteczna wykonana w trakcie tego procesu wynosi

$$W_b = c_V m (T_1 - T_w) - p_0 (V_2 - V_1) \quad (18a)$$

$$= c_V m (T_1 - T_w) - p_0 \left[\left(\frac{T_1}{T_w} \right)^{1/(\gamma-1)} - 1 \right] \frac{mRT_1}{Mp_1}. \quad (18b)$$

Sprawność w przypadku b) wynosi

$$\begin{aligned} \eta_b &= \frac{W_a + W_b}{Q} = \\ &= \frac{(p_1 - p_0) \frac{RT_1}{Mp_1} + c_V (T_1 - T_w) - p_0 \cdot \left(\left(\frac{T_1}{T_w} \right)^{c_V M/R} - 1 \right) \frac{RT_1}{Mp_1}}{c_w (t_1 - t_w) + q_1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Podstawiając dane liczbowe dostajemy

$$\eta_b \approx 0,046. \quad (20)$$

Punktacja	
Ciepło potrzebne do wytworzenia masy m pary wodnej (wzór (12) lub równoważny)	1 pkt.
Praca użyteczna wykonana przez tłok w pkt. a) (wzór (14) lub równoważny)	2 pkt.
Sprawność maszyny w przypadku a) (wzór (15) lub równoważny)	1pkt.
Wartość liczbową sprawności w przypadku a) (wzór (16))	1pkt.
Wyznaczenie końcowej objętości na podstawie równania adiabaty (wzór (17) lub równoważny)	1pkt.
Praca użyteczna wykonana przez tłok w trakcie rozprężania adiabatycznego (wzór (18) lub równoważny)	2 pkt.
Sprawność w przypadku b) (wzór (19) lub równoważny)	1pkt.
Wartość liczbową sprawności w przypadku b) (wzór (20))	1pkt.

Zadanie T3.

Zauważmy, że ze względu na brak tarcia, stan ruchu obrotowego w trakcie zderzenia się nie zmienia i ewentualne obracanie się kulki nie ma żadnego wpływu na jej ruch postępowy.

Gdy $R \leq h$ kulka odbija się poziomo od progu i nie ma szansy na niego wskoczyć. Dlatego w dalszych rozważaniach założymy, że $R \leq h$. Rozważymy również tylko $h > 0$, gdyż przypadek $h < 0$ jest trywialny (kulka zawsze przeleci).

Rozważmy moment zderzenia kulki z progiem i oznaczmy przez β (gdzie $0 < \beta < \pi/2$) kąt nachylenia do poziomu prostej przechodzącej punkt styczności kulki z krawędzią progu oraz przez środek kulki. Zauważmy, że $\beta = \pi/2 - \alpha$, gdzie α jest wprowadzonym w treści zadania kątem spełniającym warunek $h = R(1 - \cos \alpha)$.

W wyniku zderzenia z progiem składowa prędkości kulki wzdłuż osi łączącej punkt styczności z krawędzią i środek kulki zmieni zwrot na przeciwny. Oznacza to, że po zderzeniu z progiem prędkość kulki będzie tworzyła kąt 2β z poziomem, a zatem jej składowe pionowa v_y i pozioma v_x wyniosą

$$v_y = v \sin 2\beta = v \sin 2\alpha, \quad (21a)$$

$$v_x = -v \cos 2\beta = v \cos 2\alpha. \quad (21b)$$

Dalszy ruch kulki będzie rzutem ukośnym. Aby kulka miała szansę wskoczyć na próg, pozioma składowa prędkości nie może zmieniać znaku, czyli musi być spełniony warunek $\beta > \pi/4$ (lub $\alpha < \pi/4$).

Korzystając np. z zasady zachowania energii możemy wyznaczyć maksymalną wysokość, H na jaką podskoczy kulka

$$H = \frac{v_y^2}{2g}. \quad (22)$$

Ponieważ ruch w kierunku pionowym jest ruchem jednostajnie przyspieszonym, osiągnięcie maksymalnej wysokości zajmie kulce czas

$$t_1 = v_y/g. \quad (23)$$

Z zasady zachowania energii wartość pionowej składowej prędkości w chwili uderzenia kulki o wyższą część podłogi wynosi $v_2 = \sqrt{2g(H - h)}$, a zatem czas spadku z maksymalnej wysokości na wyższą część podłogi wyniesie

$$t_2 = \sqrt{2(H - h)/g} \quad (24a)$$

$$= \sqrt{v_y^2/g^2 - 2h/g}. \quad (24b)$$

Aby kulka „wskoczyła” na próg, musi być spełniony warunek $H \geq h$, czyli

$$\frac{v_y^2}{2g} = \frac{v^2 \sin^2 2\alpha}{2g} \geq h, \quad (25)$$

oraz w trakcie lotu kulka musi przebyć w poziomie co najmniej odległość dzielącą środek kulki od progu, czyli $R \sin \alpha$. Ponieważ czas tego „lotu” wynosi $t_1 + t_2$, to aby kulka wskoczyła na próg musi być spełniony warunek

$$(t_1 + t_2) v_x > R \sin \alpha,$$

czyli

$$\left[\frac{v \sin 2\alpha}{g} + \sqrt{\frac{v^2 \sin^2 2\alpha}{g^2} - \frac{2R(1 - \cos \alpha)}{g}} \right] v \cos 2\alpha > R \sin \alpha. \quad (26)$$

Po przekształceniach trygonometrycznych, korzystając z tego, że $\sin \alpha > 0$, dostaniemy

$$v \left[\frac{2v \cos \alpha}{g} + \sqrt{\frac{4v^2 \cos^2 \alpha^2}{g^2} - \frac{2R(1 - \cos \alpha)}{g \sin^2 \alpha}} \right] (2 \cos^2 \alpha - 1) > R.$$

Podstawiając $\cos \alpha = 1 - h/R$ otrzymamy

$$\frac{v^2}{gR} \left\{ 2(1 - h/R) + \sqrt{4(1 - h/R)^2 - \frac{2gR}{v^2(2 - h/R)}} \right\} [2(1 - h/R)^2 - 1] > 1. \quad (27)$$

Zauważmy, że gdy nie jest spełniony warunek (25), pod pierwiastkiem w powyższym wyrażeniu pojawia się liczba ujemna. Zatem, formalnie rzecz biorąc, aby kulka wskoczyła na wyższą część podłogi nie zderzając się powtórnie z krawędzią progu, konieczne i wystarczające jest spełnienie warunku (26). Ten warunek jest spełniony w przypadkach b) i c), nie jest spełniony w przypadkach a) i d).

Punktacja	
Prędkość kulki po odbiciu od progu (wzory (21) lub równoważne)	2 pkt.
Maksymalna wysokość, na jaką podskoczy kulka, oraz czas osiągnięcia tej wysokości (wzory (22) i (12) lub równoważne)	2 pkt.
Czas spadku na wyższą część podłogi (wzór (24) lub równoważny)	1 pkt.
Warunek (25) lub równoważny	1pkt.
Warunek (27) lub równoważny	2 pkt.
Wyznaczenie, że kulka wskoczy na próg w przypadkach b) i c), a nie wskoczy w przypadkach a) i d)	2 pkt.

Zadanie T4. NUMERYCZNE.

Równania ruchu przybliżamy przez

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_x, \quad (28a)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = v_y, \quad (28b)$$

$$\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{F_x}{m} = -\gamma \sqrt{v_x^2 + v_y^2} v_x, \quad (28c)$$

$$\frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{F_y}{m} = -\gamma \sqrt{v_x^2 + v_y^2} v_y - g. \quad (28d)$$

gdzie $\gamma = \frac{1}{2}c_x S \rho_p / m$. Stąd algorytm ma następującą postać:

Inicjalizacja:

$$x_0 = 0, \quad (29a)$$

$$y_0 = 0, \quad (29b)$$

$$v_{x,0} = v \cos \alpha, \quad (29c)$$

$$v_{y,0} = v \sin \alpha. \quad (29d)$$

Krok algorytmu:

dopóki $y_n > 0$, powtarzaj

$$x_{n+1} = x_n + v_{x,n} \Delta t, \quad (30a)$$

$$y_{n+1} = y_n + v_{y,n} \Delta t, \quad (30b)$$

$$v_{x,n+1} = v_{x,n} - \gamma \sqrt{v_{x,n}^2 + v_{y,n}^2} v_{x,n} \Delta t, \quad (30c)$$

$$v_{y,n+1} = v_{y,n} - \left(\gamma \sqrt{v_{x,n}^2 + v_{y,n}^2} v_{y,n} + g \right) \Delta t. \quad (30d)$$

Przedstawiamy przykładowe rozwiązanie zadania wykorzystujące arkusz kalkulacyjny (np. *Open Office Calc* lub *Microsoft Excel*). Omawiany arkusz można pobrać ze strony internetowej Komitetu Głównego Olimpiady Fizycznej <http://www.kgof.edu.pl/>.

Główna część arkusza składa się z sześciu kolumn:

1. czas t - ta kolumna nie jest niezbędna dla rozwiązania zadania, ale pozwala na śledzenie zależności położenia od czasu,
2. współrzędna x położenia,
3. współrzędna y położenia,

4. prędkość pozioma v_x ,
5. prędkość pionowa v_y ,
6. wartość prędkości $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ - nie występuje ona jawnie w powyższym algorytmie, ale upraszcza obliczenia.

Wartości w pierwszym wierszu (dla $t = 0$) są określone na podstawie wzorów (29). Wartości w każdym z następnych wierszy są obliczane na podstawie wartości w wierszu poprzednim zgodnie z wzorami (30). Ze względu na naturę arkusza kalkulacyjnego, liczba iteracji jest tu ustalona, co oznacza, że dla niektórych wartości parametrów, dla dużych n otrzymujemy wartości y_n dość znacznie poniżej 0. Nie jest to jednak żadnym ograniczeniem, bo zawsze można rozważyć jedynie wiersza spełniające warunek $y_n \geq 0$ oraz pierwszy wiersz dla którego $y_n < 0$. (Oczywiście, jeśli ostatnie y_n nie jest mniejsze od 0, należy zwiększyć liczbę iteracji lub zwiększyć wartość kroku czasowego.) Dla łatwiejszej wizualnej identyfikacji wartości $y_n < 0$ są wyświetlane w kolorze czerwonym.

W celu ułatwienia analizy ten sam arkusz został skopiowany, w ramach tego samego skoroszytu, dwukrotnie. W każdym z nich znajdują się wyniki symulacji dla trzech różnych kątów wystrzału.

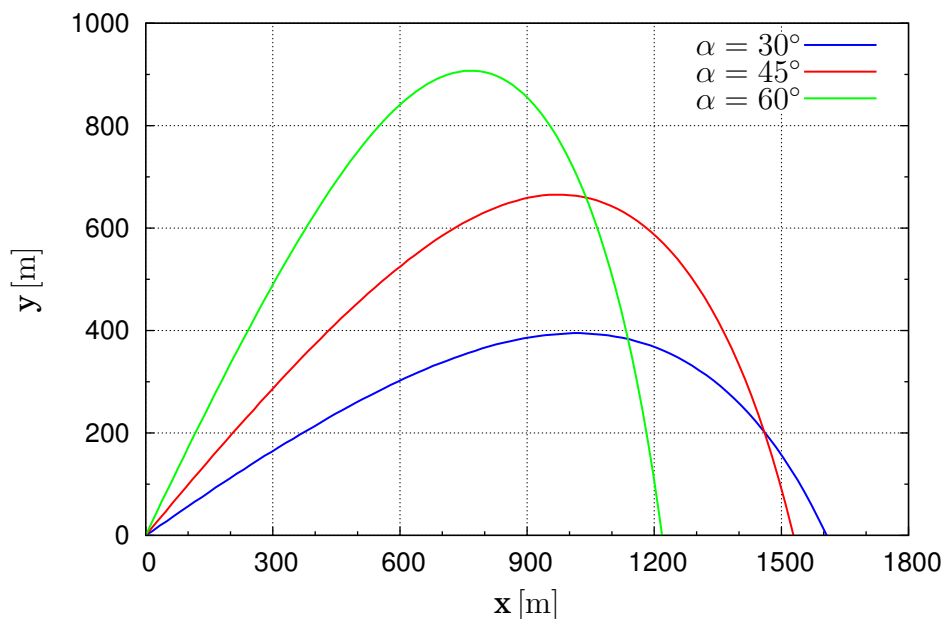
Kolejny arkusz zawiera na jednym wykresie tory wyznaczone w poprzednich arkuszach. Pozwala to na zobaczenie na jednym wykresie torów odpowiadających różnym parametrom.

Zgodnie z sugestią z treści zadania, w dalszej analizie przyjęto, że wyniki powinny mieć dokładność co najmniej 1%.

Wstępnie krok czasowy został ustalony na $\Delta t = 0,02$ s. Dla tej wartości odstęp między kolejnymi wyznaczonymi położeniami kuli nie jest większy (dla $y_n \geq 0$, a takie wartości nas interesują) niż $v_0 \cdot \Delta t = 6$ m. Jako zasięg przyjęto wartość x_n odpowiadającą najmniejszej w trakcie spadku wartości $|y_n|$. Dodatkowy błąd związany z takim wyznaczeniem zasięgu jest nie większy niż $v_0 \cdot \Delta t / 2 = 3$ m. Dla kąta $\alpha = 30^\circ$, po zmniejszeniu kroku dwukrotnie, zasięg strzału zmienił się z 1606,8 m na 1607,6 m, a wykresy w obu przypadkach, w części odpowiadającej temu samemu zakresowi x , wizualnie się pokrywały. W dalszych rozważaniach przyjęto $\Delta t = 0,01$ s, co z bardzo dużym nadmiarem wystarcza do osiągnięcia dokładności 1%.

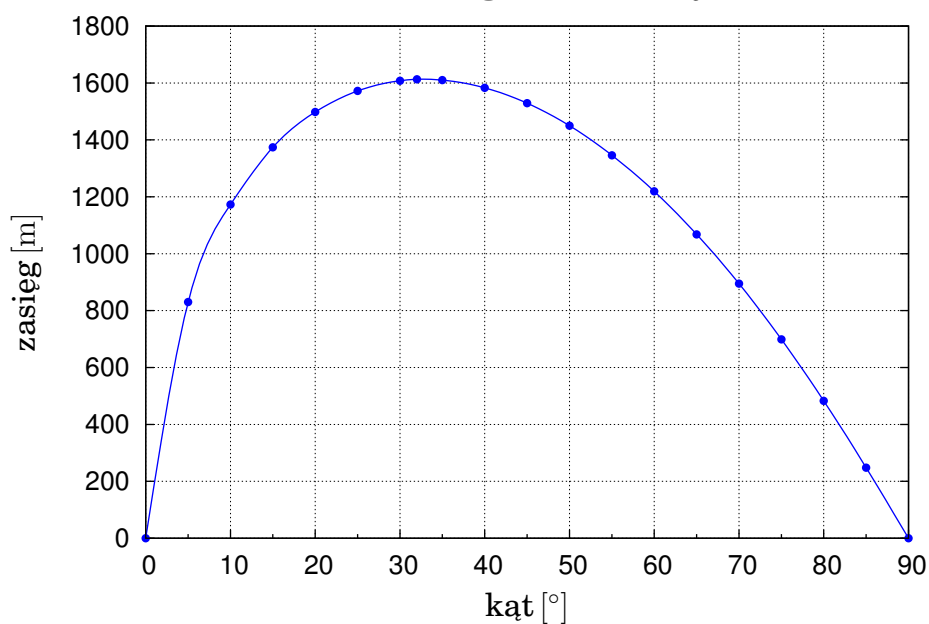
Tory dla $\alpha = 30^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, oraz $\alpha = 60^\circ$ są przedstawione są na wykresie.

Tor dla różnych kątów wystrzału



Automatyczne wykreślenie zależności zasięgu strzału od kąta jest, przy wykorzystaniu arkusza kalkulacyjnego, dość trudne. W opisywanym rozwiązaniu zmieniano w arkuszu parametr (kąt) α od 0° do 90° co 5° i wynik zapisywano w osobnym arkuszu (w ramach tego samego skoroszytu). Ponieważ z uzyskanych wartości wynikało, że maksimum znajduje się pomiędzy $\alpha = 30^\circ$, a $\alpha = 35^\circ$, wyznaczono również zasięg dla $\alpha = 32,5^\circ$. Wykres odpowiadający uzyskanym wartościom jest przedstawiony poniżej.

Zależność zasięgu od kąta wystrzału



Z wykresu (najlepiej w wersji elektronicznej) można odczytać, że maksymalny zasięg jest osiągany dla kąta $\alpha = 32,5^\circ \pm 2,5^\circ$. Określenie maksymalnej war-

tości zasięgu z wydrukowanego wykresu nie jest zbyt dokładne i lepiej skorzystać z wersji elektronicznej wykresu lub po prostu przyjąć, że jest równy zasięgowi dla kąta $\alpha = 32,5^\circ$. Zgodnie z poprzednimi rozważaniami, przyjmujemy, że niepewność jego wyznaczenia nie jest większa niż 1% i w związku z tym maksymalny zasięg to (1610 ± 16) m.

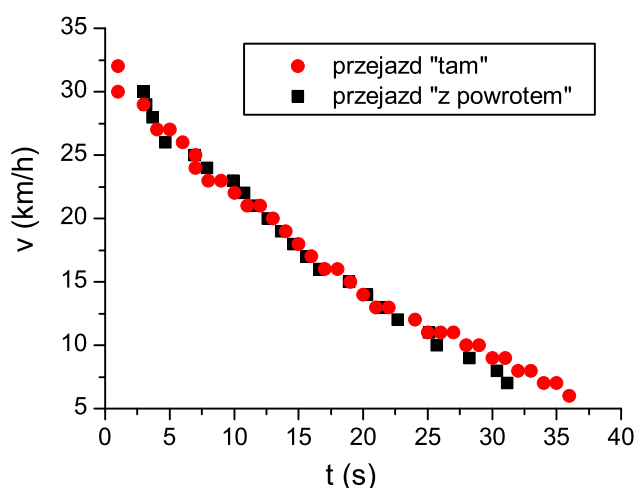
Punktacja	
Algorytm prowadzący do rozwiązania problemu (wzory (29) i (30) lub równoważne) wraz uzasadnieniem w postaci równań różnicowych (28)	2 pkt.
Implementacja algorytmu wraz z opisem oraz uzasadnieniem dokładności	3 pkt.
Wykres torów dla $\alpha = 30^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, oraz $\alpha = 60^\circ$	2 pkt.
Wykres zależności zasięgu od kąta wystrzału wraz z opisem	2 pkt.
Maksymalny zasięg i odpowiadający mu kąt	1 pkt.

Uwaga: nie jest wymagane dostarczenie programu lub arkusza kalkulacyjnego, który służył do rozwiązania problemu.

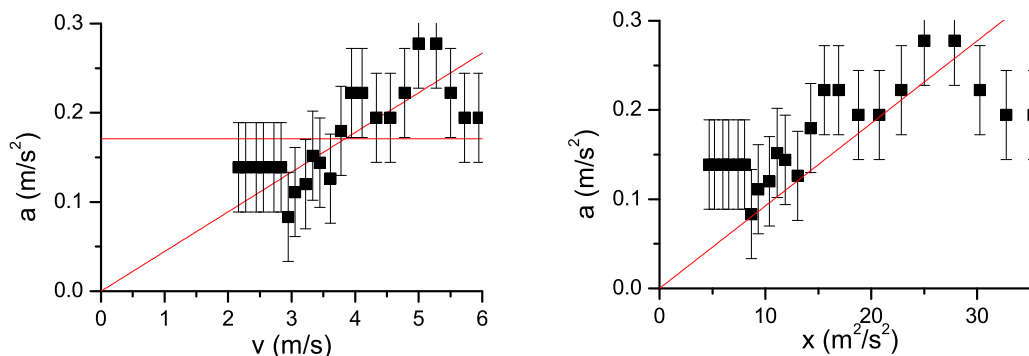
Zadanie D1.

Proponowane rozwiązanie opiera się na zarejestrowaniu wskazania prędkościomierza podczas swobodnego hamowania pod wpływem oporów ruchu. Po uprzednim rozpedzeniu się nagrywamy wskazanie prędkościomierza np. za pomocą telefonu komórkowego z aparatem fotograficznym. Odtwarzając nagranie (np. klatka po klatce) zapisujemy zmierzone wartości prędkości w kolejnych chwilach czasu. Eksperyment należy kilkakrotnie powtórzyć w celu wyeliminowania błędów grubych. Porównanie wyników przy jeździe w obu kierunkach umożliwi zweryfikowanie założenia o zaniedbywalnym wpływie nachylenia terenu lub prędkości wiatru. W przypadku stwierdzenia powtarzalnych różnic między wynikami w obu kierunkach należy wprowadzić odpowiednie poprawki, np. uśredniając obie serie danych.

Podczas wykonywania eksperymentu ważne jest zachowanie jednakowej sylwetki w celu zachowania powtarzalności pomiaru.



W celu porównania trzech proponowanych zależności siły oporu od prędkości, zebrane dane różniczkujemy numerycznie. Przy tej operacji należy unikać dużych błędów pojawiających się przy bezpośrednim wyliczeniu ilorazów różnicowych (typowy prędkościomierz podaje prędkość z dokładnością do 1 km/h). W prezentowanym rozwiązaniu zastosowano metodę kroczącą: do każdego kolejnych 5 punktów dopasowano prostą, której nachylenie następnie wykreślono w funkcji średniej prędkości dla tych punktów. Otrzymane wyniki za-prezentowano na rysunku poniżej (w funkcji v oraz v^2).



Zaznaczone na wykresie niepewności odpowiadają precyzji określenia nachylenia kolejnych prostych, oszacowaną przez próbne dopasowania prostych o różnych współczynnikach kierunkowych. Aby zweryfikować proponowane zależności do danych na wykresie $a(v)$ dopasowujemy odpowiednio prostą poziomą $y = C/m$ lub prostą przechodzącą przez początek układu współrzędnych $y = A/m \cdot x$ (m jest masą rowerzysty z rowerem). Trzecią propozycję weryfikujemy dopasowując do danych $a(v^2)$ prostą $y = B/m \cdot x$. Powyższe wykresy pokazują, że ze względu na niewielką dokładność pomiaru nie można jednoznacznie wskazać najlepszej z proponowanych zależności.

Orientacyjne wartości dopasowanych parametrów:

$$A/m = 0,044 \text{ s}^{-1} \quad (31a)$$

$$B/m = 0,0089 \text{ s} \quad (31b)$$

$$C/m = 0,92 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (31c)$$

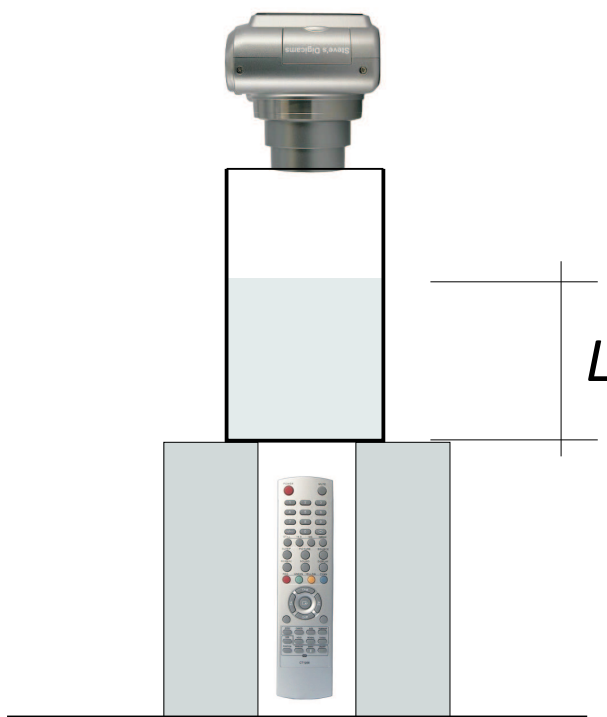
Uwaga: Alternatywnym, równie poprawnym sposobem wykonania zadania jest analiza prędkości hamowania od przebytej odległości (mierzonej taśmą mierniczą). W takim przypadku niezbędne jest przekształcenie proponowanych wzorów odpowiednie dla danego typu eksperymentu.

Prawidłowym rozwiązaniem jest zarówno wyznaczenie kombinacji A/m , B/m , C/m jak i założenie masy rowerzysty z rowerem i wyznaczenie samych parametrów A , B , C .

Punktacja	
Pomysł doświadczenia	4 pkt.
Wykonanie doświadczenia	6 pkt.
Sprawdzenie poczynionych założeń (np. dla przedstawionego rozwiązania przez jazdę w drugą stronę)	2 pkt.
Wykreślenie wykresów i dopasowanie odpowiednich prostych	6 pkt.
Poprawne wnioski	2 pkt.

Zadanie D2.

Do pomiarów zestawiono układ jak na rysunku, użyto pilota od telewizora LCD.



Aparatem cyfrowym wykonano po 5 zdjęć pilota przez warstwę wody o różnej grubości. Typowy pilot od telewizora i innych urządzeń audio-wideo nie emituje wiązki światła o stałym natężeniu, ale serie impulsów. Najprościej jest uśrednić ten efekt wykonując odpowiednią liczbę zdjęć w tych samych warunkach.

Wszystkie fotografie muszą być wykonane dla tych samych parametrów ekspozycji: czasu naświetlania i otworu przesłony. Jeśli, w prostym aparacie fotograficznym, nie ma możliwości ustawienia tych parametrów ręcznie, można poradzić sobie wykonując zdjęcia w tych samych warunkach, zaś fotografowany obiekt (diode pilota) umieścić w rogu kadru, który nie jest uwzględniany (lub jest uwzględniany z bardzo niską wagą) przy automatycznym doborze parametrów ekspozycji.

Do odczytania jasności zapisanego obrazu potrzebny jest program do obróbki zdjęć z narzędziem typu „color picker” - pozwala on, dla pliku z czarno-białą fotografią, odczytać jasność wybranego piksela, najczęściej w skali 8-bitowej (od 0 do 256) albo stopień zaczerwienia (0-100). Z darmowych programów taką opcję oferuje np. Photoscape (www.photoscape.org).

W tabeli przedstawiono przykładowe wyniki pomiarów dla pustego wazonu (w układzie zestawionym jak na rysunku) oraz po napełnieniu go wodą do wysokości L równej od 0 do 14 cm w odstępach 2 cm. Maksymalna wysokość słupa wody była ograniczona przez wysokość wazonu. Wysokość słupa wody zmierzono linijką z niepewnością 2 mm.

Odczytano wartość średnią z 5 pikseli w okolicy maksimum natężenia (jasność obrazu), po czym uśredniono wartości dla 5 zdjęć. W prezentowanym rozwiązaniu do obróbki plików graficznych użyto programu Adobe Photoshop CS2.

Wysokość słupa wody [cm]	Jasność obrazu I_{PLIK} [j. u.]
0	83
2	75
4	73
6	61
8	46
10	42
12	37
14	26

Oczywiście warto wykonać więcej pomiarów, zmieniając wysokość słupa wody np. co 1 cm - wpłynie to znakomicie na niepewność wyznaczenia szukanej stałej.

Aby wyznaczyć stałą zaniku α przekształcamy podane wzory

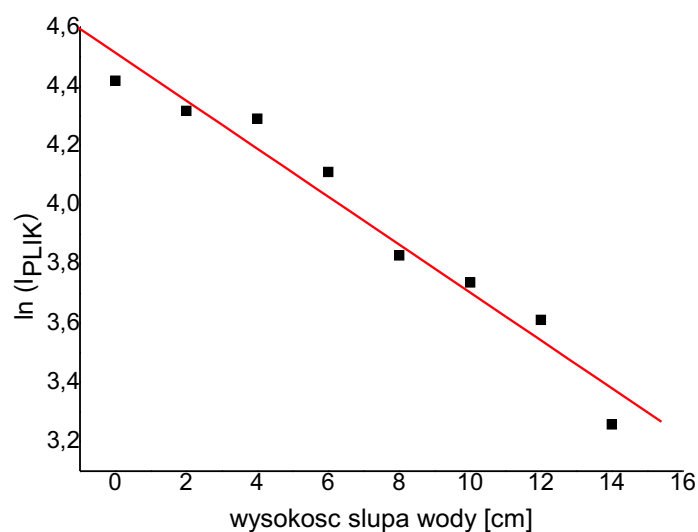
$$I_{\text{PIKSEL}} = Ce^{-\alpha L} \quad (32a)$$

$$(I_{\text{PLIK}})^{10/7} = Ce^{-\alpha L} \quad (32b)$$

$$\ln(I_{\text{PLIK}}) = B - 0,7\alpha L \quad (32c)$$

gdzie B i C są stałymi.

Wykreślając zatem $\ln(I_{\text{PLIK}})$ jako funkcję L i znajdując współczynnik kierunkowy prostej A mamy $\alpha = A/0,7$. Z wykresu i dopasowania prostej do naszych danych dostajemy $\alpha = (0,11 \pm 0,01) \text{ cm}^{-1}$. Podana niepewność wynika tylko z dopasowania prostej.



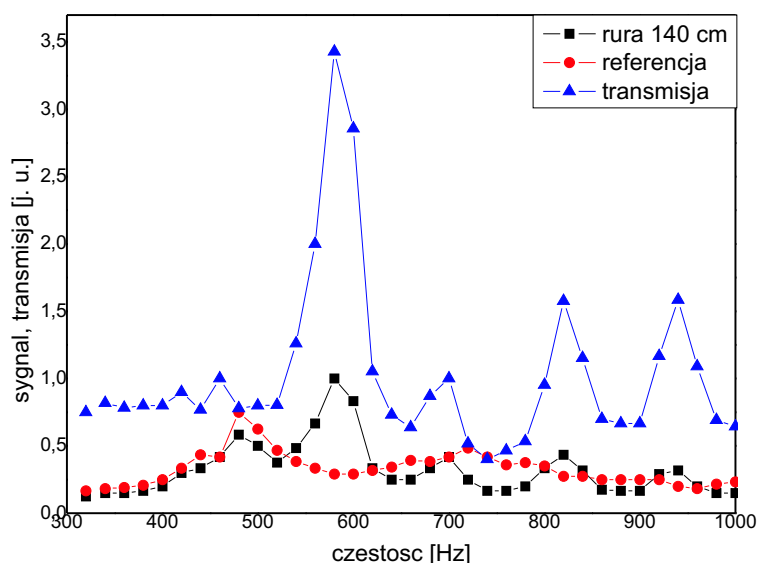
Z danych tablicowych dla czystej wody w bliskiej podczerwieni (około $1\ \mu\text{m}$) można odczytać stałą absorpcji α rzędu $0,1 - 0,3\ \text{cm}^{-1}$, zależnie od źródła. W tym obszarze spektralnym absorpcja wody zmienia się bardzo szybko z długością fali, więc dokładne porównanie z wynikami pomiarów jest trudne. Co więcej, wynik pomiaru zależy od czystości wody oraz zawartości rozpraszających obiektów takich jak pęcherzyki powietrza.

Ścisłejsza analiza związku sygnału rejestrowanego na fotografiach z natężeniem przechodzącego przez warstwę wody światła wymaga uwzględnienia efektów związanych z załamaniem światła na granicy woda/powietrze.

Punktacja	
Idea pomiaru absorpcji światła w materiale	6 pkt.
Dyskusja metody pomiaru przy użyciu dostępnych przyrządów	4 pkt.
Budowa i testy układu pomiarowego	4 pkt.
Wykonanie pomiarów i opracowanie danych	3 pkt.
Dyskusja wyników (wpływ załamania światła)	3 pkt.

Zadanie D3.

Wykonano pomiary dla rury kanalizacyjnej z PCW o średnicy zewnętrznej 50 mm, grubości ścianki 1,8 mm i długości 140 cm. Do jednego z końców rury przymocowano głośnik (średnica membrany ok. 5 cm) połączony do wyjścia karty dźwiękowej. Membrana głośnika zamyka jeden z końców rury. Na głośnik podawano napięcie sinusoidalne o maksymalnej dostępnej amplitudzie i częstotliwości zmienianej co 20 Hz w zakresie 320 – 1000 Hz. Ze względu na nieznaną charakterystykę układu karta dźwiękowa-głośnik, do pomiaru transmisji potrzebne są dwie serie pomiarów: w pierwszej (referencyjnej) mikrofon umieszczono w rurze tuż przy głośniku, a w drugiej na drugim końcu rury. Przy pomocy programu „Oscyloskop” rejestrowano sygnał w mikrofonu połączonym do wejścia karty dźwiękowej i odczytywano jego amplitudę. Na wykresie pokazano amplitudy sygnału dla obu pomiarów oraz wyznaczoną transmisję „dźwiękowodu”.



Podane wyniki pomiarów są przykładowe i dane zmierzone w różnych konfiguracjach mogą się istotnie różnić. Istotne jest zrozumienie metody pomiaru, poprawny opis układu doświadczalnego i analiza (omówienie) otrzymanych wyników.

Dla lepszego zrozumienia charakterystyk „dźwiękowodów” można wykonać serie pomiarów dla: różnych długości rury, innych średnic rury, mikrofonu umieszczonego w różnych miejscach względem końca rury. Wynik będzie również zależał od sposobu zakończenia rury - inaczej zachowuje się rura z końcem tłumiącym (wypełnionym miękkim materiałem, jak w naszym pomiarze), inaczej z końcem otwartym, a jeszcze inaczej ze sztywnym zakończeniem odbijającym dźwięk.

Ważne jest zebranie odpowiedniej liczby punktów (wybranie kroku zmiany częstotliwości), by zobaczyć charakterystyczne cechy transmisji, na przykład występowanie rezonansów.

Punktacja	
Idea pomiaru transmisji dźwięku	3 pkt.
Uwzględnienie charakterystyk głośnika i mikrofonu	3 pkt.
Budowa i opis układu pomiarowego	6 pkt.
Wykonanie pomiarów	3 pkt.
Opracowanie i dyskusja wyników	5 pkt.