

# LIX OLIMPIADA FIZYCZNA

## Rozwiązania zadań

### ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA

#### CZEŚĆ II

#### Zadanie T1.

Równanie ruchu każdego z prętów ma postać

$$m\frac{l^2}{3}\varepsilon_1 = -mg\frac{l}{2}\alpha_1 - kl^2(\alpha_1 - \alpha_2) + M, \quad (1)$$

$$m\frac{l^2}{3}\varepsilon_2 = -mg\frac{l}{2}\alpha_2 + kl^2(\alpha_1 - \alpha_2) - M, \quad (2)$$

gdzie  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  są kątami odchylenia prętów od pionu,  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$  – ich przyspieszeniami kątowymi,  $M$  – momentem sił magnetycznych,  $ml^2/3$  jest momentem bezwładności każdego z prętów względem punktu zawieszenia,  $mg\frac{l}{2}\alpha_1$  i  $mg\frac{l}{2}\alpha_2$  są momentami siły ciężkości z uwzględnieniem przybliżeń, a  $l(\alpha_1 - \alpha_2)$  – wydłużeniem sprężyny z uwzględnieniem przybliżeń.

Dodając te równania i podstawiając  $\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$ ,  $\varepsilon = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2 = d^2\alpha/dt^2$  otrzymamy równanie

$$2m\frac{l^2}{3}\varepsilon = -2mg\frac{l}{2}\alpha. \quad (3)$$

Jest to równanie ruchu "środka masy" układu. Ponieważ nie występuje tu  $M$ , przepływ prądu nie ma wpływu na zmiany  $\alpha$ .

Odejmując od siebie wyjściowe równania otrzymamy

$$m\frac{l^2}{3}\Delta\varepsilon = -\left(\frac{mg}{2l} + 2k\right)\Delta\alpha + 2M, \quad (4)$$

gdzie  $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ ,  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = d^2\Delta\alpha/dt^2$ .

Gdy  $M = 0$  jest to równanie ruchu oscylatora harmonicznego o częstotliwości

$$f_{osc} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3g}{2l} + 6\frac{k}{m}}. \quad (5)$$

Jeśli moment siły  $M$  będzie niezerowy i będzie się zmieniał z częstotliwością  $f_{osc}$ , to wystąpi rezonans.

Niech  $I = I_0 \cos(2\pi ft)$  będzie natężeniem prądu płynącego przez pręty. Pole magnetyczne wytwarzane przez prąd płynący w pręcie jest proporcjonalne do  $I$ , czyli  $B \sim I$ . Moment siły działający na drugi pręt jest proporcjonalny do  $BI$ , czyli ostatecznie

$$M \sim I^2 = I_0^2 \cos^2(2\pi ft) = \frac{I_0^2}{2} [1 - \cos(2 \cdot 2\pi ft)].$$

Oznacza to, że jeśli przez pręty płynie prąd o częstotliwości  $f$ , to częstotliwość zmian odpowiedniego momentu siły wynosi  $2f$ . Zatem rezonans zajdzie gdy

$$f = \frac{f_{osc}}{2} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{3g}{2l} + 6\frac{k}{m}}. \quad (6)$$

<b>Punktacja</b>	
Przybliżone lub ściśle równania ruchu prętów (wzory (1) i (2) lub równoważne)	2 pkt.
Równanie ruchu we współrzędnej względnej $\Delta\alpha$ (wzór (4) lub równoważny)	2 pkt.
Częstotliwości swobodnych drgań we współrzędnej względnej (wzór (5) lub równoważny)	1 pkt.
Zauważenie, że gdy częstotliwość zmiany momentu siły wywołwanego przez przepływ prądu jest równa częstotliwości drgań swobodnych we współrzędnej względnej, to zachodzi rezonans	2 pkt.
Wyznaczenie częstotliwości prądu, przy której zachodzi rezonans (wzór (6) lub równoważny)	3 pkt.

### Zadanie T2.

a) Mamy  $M = m_p + m$ , gdzie  $m$  jest szukaną masą rakiety bez paliwa. Zatem końcowa energia kinetyczna wynosi

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left( v_g \ln \frac{m + m_p}{m} \right)^2. \quad (7)$$

Oznaczając  $x = m/m_p$  otrzymamy

$$E_k(x) = \frac{1}{2}m_p v_g^2 x \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right]^2. \quad (8)$$

Maksimum tej funkcji odpowiada równości zera pochodnej po  $x$

$$\left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right]^2 + 2x \frac{\ln(1 + 1/x) - 1}{1 + 1/x} \frac{1}{x^2} = 0,$$

co jest równoważne warunkowi

$$\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{2}{1+x} = 0. \quad (9)$$

Na podstawie wykresu lewej strony powyższej równości otrzymujemy, że przybliżona wartość rozwiązania wynosi

$$x \approx 0,25, \quad (10)$$

co daje maksymalną wartość energii kinetycznej

$$E_k \approx \frac{1}{2} m_p v_g^2 \cdot 0,65. \quad (11)$$

Szukana wartość  $m/m_p$  można wyznaczyć też wprost na podstawie wykresu funkcji  $E_k$  lub innymi metodami (np. wykorzystując arkusz kalkulacyjny).

b) Zauważmy, że ruch lecącej rakiety jest złożeniem ruchu ze stałym przyspieszeniem pod wpływem pola grawitacyjnego oraz ruchu rakiety w przypadku niewystępowania sił zewnętrznych. Oznacza to, że położenie rakiety chwili  $t$ , przy założeniu, że  $t > t_s$ , jest dane wzorami

$$x = \left[ \frac{v}{2} t_s + (t - t_s) v \right] \cos \alpha = \left( -\frac{1}{2} t_s + t \right) v \cos \alpha, \quad (12)$$

$$y = \left[ \frac{v}{2} t_s + (t - t_s) v \right] \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2 = \left( -\frac{1}{2} t_s + t \right) v \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2, \quad (13)$$

gdzie  $x$  jest współrzędną poziomą, a  $y$  – pionową, a  $v$  określoną w pkt. a) prędkością jaką osiągnęłaby raketa, gdyby nie było grawitacji.

Aby wyznaczyć zasięg powinniśmy do pierwszego równania podstawić  $t$  wyznaczone z warunku  $y = 0$ . Jednak prowadzi to do dosyć skomplikowanych rachunków, dlatego postąpimy nieco inaczej; wyznaczając z pierwszego równania  $t$  jako funkcję  $x$  i podstawiając do drugiego otrzymamy

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2} \left( \frac{x}{v \cos \alpha} + \frac{t_s}{2} \right)^2 = 0. \quad (14)$$

Zasięg jest dany jako wartość  $x$ , przy której  $y$  zmienia znak z dodatniego na ujemny. Zauważmy jednak, że powyższe wyrażenie jest dla  $t_s \geq 0$  malejącą funkcją  $t_s$ . Oznacza to, że dla  $t_s > 0$  wysokość  $y$  staje się równa zero dla mniejszych  $x$ , niż dla  $t_s = 0$ . A zatem największy zasięg osiągniemy gdy  $t_s = 0$  (oczywiście jest to teoretyczna, graniczna wartość, w praktyce niemożliwa do osiągnięcia). Przypadek  $t_s = 0$  odpowiada zwykłemu rzutowi ukośnemu z prędkością początkową  $v$ , a w takim przypadku maksymalny zasięg osiągamy gdy  $\alpha = \pi/4$ .

Większym z dwóch rozwiązań równania (14) jest (mniejsze rozwiązanie jest niefizyczne, gdyż równanie (14) jest słuszne jedynie gdy czas lotu jest większy od  $t_s$ )

$$x = \frac{(-gt_s + 2v \sin(\alpha) + 2\sqrt{-gt_s v \sin \alpha + v^2 \sin^2 \alpha})}{2g} v \cos \alpha. \quad (15)$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymamy:

maksymalny zasięg ( $\alpha = \pi/4$ ,  $t_s = 0$ s) – 1000m;

zasięg dla  $\alpha = \pi/4$  i  $t_s = 1$ s – 928m;

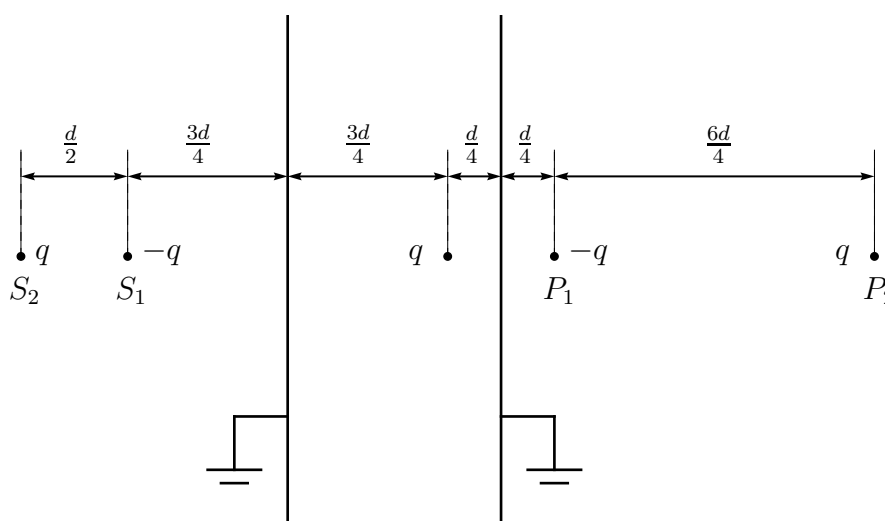
Dla  $\alpha = \pi/2$  raketa startuje i leci pionowo, a zatem zasięg jest równy 0.

Dla  $\alpha = \pi/4$  i  $t_s = 10$ s pionowa składowa przyspieszenia nadawanego rakiecie przez silnik jest mniejsza od  $g$ , tak więc w tym przypadku zasięg też jest równy 0.

Punktacja	
Wzór (7) na końcową energię kinetyczną rakiety	1 pkt.
Wyznaczenie przybliżonej wartości $m/m_p$ ( $\approx 0,25$ ) odpowiadającej maksymalnej końcowej energii kinetycznej	2 pkt.
Zależność położenia rakiety od czasu (wzory (12) i (13) lub równoważne)	2 pkt.
Ustalenie, że maksymalny zasięg jest dla $\alpha = \pi/4$ i $t_s = 0$ s i uzasadnienie tego faktu	3pkt.
Zauważenie, że dla $\alpha = \pi/2$ zasięg jest równy 0	1pkt.
Wyznaczenie wartości liczbowych zasięgu w pozostałych przypadkach	1pkt.

### Zadanie T3.

W celu obliczenia siły działającej na ładunek  $q$  wygodnie jest skorzystać z metody obrazów. Mamy dwie uziemione płyty, więc w punktach  $P_1$  i  $S_1$  powinny znajdować się obrazy ładunku  $q$  o wartości  $-q$  (położenie powyższych punktów jest pokazane na rysunku). Oczywiście odległość punktu  $P_1$  od prawej płyty wynosi  $d/4$ , a punktu  $S_1$  jest równa  $3d/4$ . Ale zauważmy, że każdy z obrazów powoduje konieczność umieszczenia kolejnych, tym razem o ładunku  $q$  w punktach  $P_2$  i  $S_2$ . Łatwo zauważyć, że w ten sposób będziemy musieli umieścić nieskończenie wiele obrazów ładunku  $q$  bo obu stronach płyt. Każdy z nich będzie miał na przemian ładunek  $-q$  i  $q$ . Te po stronie prawej płyty (patrz rysunek) będą znajdowały się w następujących odległościach od niej:  $d/4$ ,  $(d/4 + 6d/4)$ ,  $(d/4 + 6d/4 + 2d/4)$ ,  $(d/4 + 6d/4 + 2d/4 + 6d/4)$ , ..., czyli  $a$ ,  $7a$ ,  $9a$ ,  $15a$ , ... gdzie  $a = d/4$ . Z kolei te po lewej stronie będą położone w odległościach  $3d/4$ ,  $(3d/4 + 2d/4)$ ,  $(3d/4 + 2d/4 + 6d/4)$ ,  $(3d/4 + 2d/4 + 6d/4 + 2d/4)$ , ... od lewej płyty, czyli  $3a$ ,  $5a$ ,  $11a$ ,  $13a$ , ...



Mamy więc, że siła, jaka działa na ładunek  $q$  od strony obrazów po prawej stronie, wynosi:

$$F_P = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} - \frac{1}{16^2} + \dots \right), \quad (16)$$

gdzie dodatni zwrot został przyjęty w prawo. Z kolei siła jaka działa na ładunek  $q$  ze strony obrazów po lewej stronie wynosi:

$$F_L = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left( -\frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{14^2} - \frac{1}{16^2} + \dots \right). \quad (17)$$

Całkowita siła działająca na ładunek  $q$  wynosi więc:

$$F = F_P + F_L = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{10^2} - \frac{1}{14^2} + \dots \right), \quad (18)$$

co po wstawieniu  $a = d/4$  przybiera postać:

$$F = \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 d^2} \left( 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots \right). \quad (19)$$

Aby otrzymać 2,5% dokładność wystarczy obliczyć trzy pierwsze wyrazy (ponieważ jest to szereg jest naprzemienny o wyrazach malejących, błąd jest mniejszy niż pierwszy odrzucony wyraz). Mamy więc:

$$F|_{3\text{wyrazy}} \approx 0,93 \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 d^2}. \quad (20)$$

Przybliżenie ścisłej wartości z dokładnością do trzech miejsc po przecinku wynosi

$$F \approx 0,916 \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 d^2}, \quad (21)$$

co jest, w granicach założonej dokładności, zgodne z poprzednim wynikiem.

**Ciekawostka:** Występująca w rozwiązaniu tego zadania suma szeregu

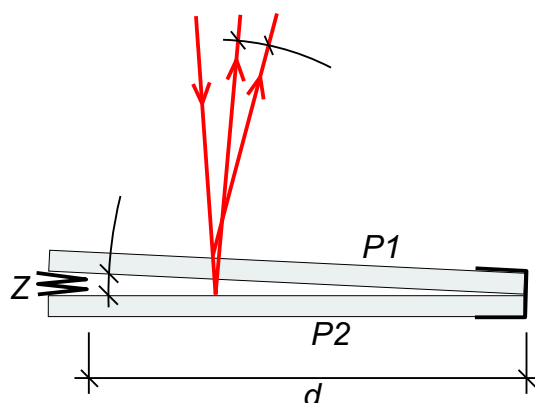
$$K = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2},$$

jest znana jako stała Catalana i występuje w wielu zagadnieniach matematycznych.

<b>Punktacja</b>	
Zauważenie, że można skorzystać z metody obrazów	1 pkt.
Opis konstrukcji położenia ładunków obrazowych i zauważenie, że będzie ich nieskończenie wiele	4 pkt.
Wyrażenie na na szukaną siłę z co najmniej 4 wyrazami szeregu	2 pkt.
Obliczenie przybliżonej wartości szukanej siły (wynik (21)±2,5%) wraz z uzasadnieniem, że otrzymany wynik jest w żądanych granicach błędu	3 pkt.

**Zadanie D1.**

Idea rozwiązania opiera się na pomiarze małych kątów przy pomocy wiązki lasera (bardzo długa wskazówka). Pomiędzy dwie płytki szklane P1, P2 – mikroskopowe szkiełka podstawowe o wymiarach  $1 \times 3$  cala – stykające się krótszą krawędzią włożyłem mierzony znaczek Z złożony na cztery. Najwygodniej jest skleić płytki jedną krawędzią przy pomocy taśmy klejącej, bardzo ważne jest zapewnienie dobrego styku krawędzi płytek. Zagięcie musi być dobrze „rozprasowane”, by nie wpływało na wynik pomiaru. Na płytkach można piśakiem narysować skalę, by łatwo ustalić odległość krawędzi znaczka od krawędzi płytki  $d$ . Całość mocujemy przy pomocy plasteliny na stole i oświetlamy płytki wiązką lasera, jak na rysunku.



Jeśli przez  $z$  oznaczymy grubość znaczka, przez  $N$  krotność złożenia znaczka (w moim przypadku  $N = 4$ ), przez  $d$  odległość krawędzi znaczka od stykających się krawędzi płytek szklanych, zaś przez  $\alpha$  kąt między płytkami, mamy

$$\sin \alpha = \frac{Nz}{d}. \quad (22)$$

Kąt  $\alpha$  jest mały, możemy więc śmiało przybliżyć jego sinus (albo tangens) przez sam kąt

$$z = \frac{d \cdot \alpha}{N}. \quad (23)$$

Jeśli oświetlimy płytki szklane wiązką światła, to z prostych rozważań geometrycznych widzimy, że kąt między wiązkami światła odbitymi od jednej i drugiej płytki jest dwa razy większy od kąta, jaki tworzą płytki między sobą. Kąt między odbitymi wiązkami możemy z kolei wyznaczyć mierząc odległość plamek, jakie powstają na odległym ekranie. Jeśli odległość plamek obserwowanych na ekranie odległym o  $L$  wynosi  $h$ , to mamy

$$\sin 2\alpha = \frac{h}{L}. \quad (24)$$

Ponownie przybliżając sinus małego kąta przez sam kąt możemy napisać

$$2\alpha = \frac{h}{L}. \quad (25)$$

Zatem

$$z = \frac{hd}{2NL}. \quad (26)$$

Odbite wiązki obserwowałem na ścianie, przy pomocy taśmy mierniczej zmierzylem odległość od płytek do ściany ( $L = 465$  cm) oraz odległość  $h$  plamek na ścianie dla różnych położzeń znaczka (odległości  $d$ ) między płytkami.

$d$ [cm]	$h$ [cm]
3	14,4
4	11,3
5	9,5
6	7,8
7	6,6
bez znaczka	1,5

Dokładność, z jaką można wyznaczyć odległość plamek na ścianie wynika przede wszystkim z ich rozmiarów. W moim doświadczeniu rozmiar plamki lasera na ścianie wynosił ok. 8 mm, przyjąłem więc błąd pomiaru odległości między plamkami równy 3 mm.

W moich pomiarach (wyniki w tabeli) nawet bez znaczka dostałem niezerową odległość między plamkami – płytki nie są dokładnie równoległe. Oznacza to, że należy:

1. tę poprawkę odjąć od (lub dodać do) pozostałych wyników,
2. trafiać wiązką zawsze w to samo miejsce na płytce (najlepiej zaznaczyć je flamastrem).

Po uśrednieniu wyników pięciu pomiarów dostałem grubość znaczka równą

$$z = (0,10 \pm 0,01) \text{ mm}. \quad (27)$$

Pomiar porównawczy suwmiarką cyfrową daje

$$z_{\text{suwmiarka}} = (0,095 \pm 0,005) \text{ mm}. \quad (28)$$

Bardzo małe kąty można również mierzyć przy pomocy interferencji przestrzennej wiązek odbitych. Wiązka z typowego wskaźnika laserowego ma jednak tak małą średnicę (rzędu 1 mm) że bardzo trudno jest zliczyć prążki, nawet jeśli uda się je zaobserwować. Dodatkowo, wykorzystanie wzorów interferencyjnych do pomiarów odległości wymagałoby znajomości długości fali światła.

<b>Punktacja</b>	
Idea pomiaru małych kątów	4 pkt.
Wyprowadzenie właściwych wzorów (m.in. podwojenie kąta)	6 pkt.
Zestawienie układu pomiarowego	4 pkt.
Wykonanie serii pomiarów umożliwiających wyznaczenie grubości znaczka	4 pkt.
Opracowanie i dyskusja wyników	2 pkt.

**Zadanie D2.**

Pomiar współczynnika objętościowej rozszerzalności termicznej  $\beta_m$  opiera się na wyznaczeniu zmiany objętości powietrza przy zmianie temperatury. W czasie pomiarów utrzymujemy w układzie stałe ciśnienie (atmosferyczne).

Po wykonaniu szczelnego połączenia butelki z wężykiem mierzymy całkowitą pojemność butelki i wężyka wypełniając je całkowicie wodą. Objętość wody mierzymy menzurką.

Pomiary współczynnika rozszerzalności powietrza wykonujemy zanurzając butelkę do dużego naczynia z wodą o znanej temperaturze. Ewentualnie można zanurzyć również wężyk, przy czym jego koniec musi wystawać nad powierzchnię. Temperaturę wody z dużym naczyniu mierzymy termometrem. Dla obniżenia temperatury używamy lodu, dla jej podniesienia - gorącej wody. Po zmianie temperatury czekamy aż powietrze w butelce będzie miało temperaturę taką jak woda w naczyniu. Można wykonać wstępny pomiar w butelce przed jej zatknięciem, by sprawdzić, jak szybko temperatura powietrza w zanurzonej w wodzie butelce osiąga temperaturę wody w dużym naczyniu. Jako że mierzony współczynnik zmienia się z temperaturą, a w jego definicji występuje granica  $\Delta T \rightarrow 0$ , w najprostszej wersji można wykonać pomiary dla kilku par temperatur początkowych i końcowych niezbyt odległych od temperatury pokojowej (np.  $5^\circ\text{C} - 35^\circ\text{C}$ ,  $10^\circ\text{C} - 30^\circ\text{C}$ ,  $15^\circ\text{C} - 25^\circ\text{C}$ ).

Po doprowadzeniu powietrza w butelce (i wężyku) do wyższej z mierzonych par temperatur zanurzamy koniec wężyka w naczyniu z wodą i zaczynamy chłodzić butelkę do niższej temperatury. W czasie chłodzenia do butelki zasysana jest woda, której objętość (zmierzona za pomocą menzurki) jest równa zmianie objętości powietrza związanej ze zmianą jego temperatury.

Dla przemiany izobarycznej gazu doskonałego przy ciśnieniu  $p$ , wypisując równanie Clapeyrona dla zadanej ilości cząsteczek gazu  $N$ , temperatury początkowej  $T_1$  i końcowej  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ )

$$PV_1 = NRT_1 \quad (29a)$$

$$PV_2 = P(V_1 - \Delta V_{12}) = NRT_2 = NR(T_1 - \Delta T_{12}) \quad (29b)$$

Dzieląc stronami te równania dostajemy

$$\frac{\Delta V_{12}}{V_2 \Delta T_{12}} = \frac{1}{T_1} = \beta_{\text{gaz doskonały}} \quad (30)$$

Zatem dla gazu doskonałego współczynnik rozszerzalności jest równy odwrotności temperatury (w K) czyli w temperaturze pokojowej wynosi  $0,00341 \text{ K}^{-1}$ . W naszej metodzie przyjęliśmy kilka założeń: zanieśliśmy rozszerzalność termiczną szkła butelki i wody oraz przyjęliśmy, że powietrze ogrzewa się jednakowo w całej objętości wężyka i butelki.

Dodatkowo zanieśliśmy fakt, że w istocie mamy do czynienia nie z suchym powietrzem (które jest w dobrym przybliżeniu gazem doskonałym), ale z mieszaniną powietrza i pary wodnej.



W analizie wyników pomiarów przyjeśliśmy, że można przybliżyć granicę występującą w definicji  $\beta$  przez iloraz różnicowy. Należy tutaj zauważyć, że możemy co prawda zmniejszać różnicę temperatur, by coraz lepiej przybliżyć granicę  $\Delta T \rightarrow 0$ , ale wiąże się to ze zwiększaniem względnego błędu pomiaru różnicy temperatur i objętości zassanej wody, które stają się coraz mniejsze.

Do pomiarów użyłem szklanej kolby kulistej z dopasowanym korkiem gumowym i rurką szklaną o średnicy wewnętrznej 5 mm, o całkowitej pojemności  $(660 \pm 5) \text{ cm}^3$  (taki błąd wynika między innymi z konieczności pomiaru menzurką o pojemności  $100 \text{ cm}^3$ , co oznacza, że trzeba wodę przelewać z kolby do menzurki kilka razy).

Butelkę najpierw podgrzałem w dużym naczyniu z wodą przez dolewanie gorącej wody z czajnika mierząc temperaturę wody w naczyniu termometrem (dokładność  $1^\circ\text{C}$ ). Po ustaleniu się temperatury  $T_1$  (mieszanie wody) zanurzyłem wylot rurki w naczyniu z wodą i zacząłem nalewać do naczynia zimnej wody, aż do osiągnięcia założonej temperatury końcowej  $T_2$ , po czym zmierzyłem menzurką objętość wody zassanej do butelki  $\Delta V_{12}$ .

$T_1$ [ $^\circ\text{C}$ ]	$T_2$ [ $^\circ\text{C}$ ]	$\Delta V_{12}$ [ $\text{cm}^3$ ]	$\beta_m$ [ $\text{K}^{-1}$ ]
27	15	32	$0,0040 \pm 0,0007$
27	13	31	$0,0034 \pm 0,0006$
45	16	70	$0,0037 \pm 0,0002$

Na dokładność pomiaru wpływają: dokładność wyznaczenia różnicy temperatur (z moim termometrem pomiar temperatury jest obarczony niepewnością  $\pm 1^\circ\text{C}$ ) i dokładność pomiaru objętości zassanej wody (typową menzurką  $\pm 0,5 \text{ cm}^3$  jeśli mierzymy „na raz”).

<b>Punktacja</b>	
Idea pomiaru rozszerzalności cieplnej gazu	6 pkt.
Wyprowadzenie potrzebnych wzorów	4 pkt.
Budowa i testy układu pomiarowego (czas docho- dzenia do równowagi, szczelność)	5 pkt.
Wykonanie pomiarów rozszerzalności cieplnej	3 pkt.
Opracowanie i dyskusja wyników	2 pkt.

### Zadanie D3.

Parametry toru strumienia wody (zasięg i maksymalną wysokość) można wyznaczać taśmą mierniczą w bezpośrednich pomiarach, ale wygodniej odczytać je z serii fotografii (odbitek, wydruków, albo wprost w komputerze).

Wykonałem serię fotografii strumienia wody z węża ogrodowego na tle ściany z pustaków dla różnych kątów, pod którymi ustawiona jest końcówka węża. Znając rozmiary pustaka (z zaprawą 25 cm wysokości i 38 cm szerokości) można dokładnie, na bazie takiej siatki, wyznaczyć zasięg i maksymalną wysokość strumienia wody. Ważne jest, by płaszczyzna strumienia wody znajdowała się

blisko ściany (w moim pomiarze  $< 10$  cm), co pozwala zminimalizować paralaksę. Dobrze jest stosować obiektyw o długiej ogniskowej i wykonywać zdjęcie z jak największej odległości. Dla moich zdjęć odległość aparatu od ściany wynosiła ok. 8 m. Fotografując na tle ściany, od razu mamy pion, potrzebny do znalezienia kąta wylotu wody z węża.



„Siatka odniesienia” (ściana) bardzo ułatwia wszystkie pomiary, w szczególności nie trzeba się przejmować tym, że na fotografii możemy mieć zniekształcenia obrazu. Zniekształcenia powstają głównie na skutek perspektywy (nierównoległości płaszczyzny ściany i płaszczyzny matrycy bądź filmu w aparacie). Dystorsja wprowadzana przez, nawet średniej klasy, obiektyw fotograficzny jest mała, chyba, że jest to obiektyw bardzo szerokokątny. Dla porównania na mojej fotografii nałożyłem siatkę prostokątną by pokazać, że siatka z pustaków jest w odwzorowaniu fotografii zniekształcona.

Jeśli robimy pomiary bez „siatki odniesienia”, pion można zrobić ze sznurka i obciążnika. Właśnie kąt wylotu wody z węża jest tym parametrem, który najtrudniej zmierzyć „na żywo”, bez wykonywania fotografii.

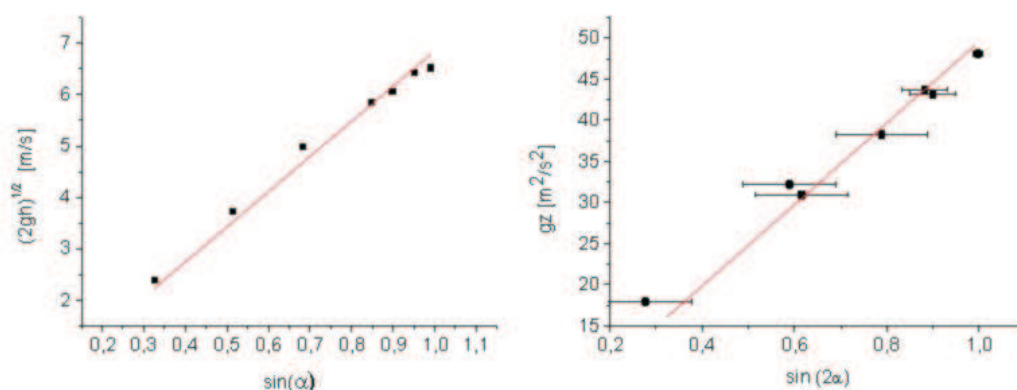
Na wykresie przedstawione są maksymalne wysokości  $h_{\max}$  oraz zasięgi  $z$  odczytane z fotografii dla kilku kątów. Sporym błędem obarczony jest pomiar kąta, który tworzy na początku wypływający strumień wody z poziomem (przyjąłem tutaj  $\pm 3^\circ$ ). Wysokość i zasięg można z moich fotografii odczytać z dokładnością 5 cm. Do zmierzonych danych dopasowałem proste, przyjmując że mam do czynienia z rzutem ukośnym bez oporu.

Do zmierzonych danych dopasowałem proste, przyjmując że mam do czynienia z rzutem bez oporów

$$h_{\max} = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g}, \quad (31a)$$

$$z = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}, \quad (31b)$$

gdzie  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$



Najlepszymu dopasowaniu do danych z pomiarów maksymalnej wysokości (wykres lewy) odpowiada prędkość wypływu wody  $v_0 = (6,8 \pm 0,2) \text{ m/s}$ , zaś dla danych z pomiarów zasięgu (wykres prawy)  $v_0 = (7,1 \pm 0,2) \text{ m/s}$ .

Jako, że największym błędem obarczony jest pomiar kąta wylotu wody, można również przeprowadzić analizę zebranych danych tak, by wyeliminować tę wielkość.

Na wykresach widać systematyczne odchylenie punktów pomiarowych od dopasowanych prostych. Na fotografiach można z kolei zobaczyć, że tor strumienia wody nie jest symetryczny względem prostej pionowej przechodzącej przez wierzchołek toru. Efekty te wynikają z występowania oporów ruchu - warto uświadomić sobie, że zależność tego oporu od prędkości strumienia jest zupełnie inna niż np. w przypadku ruchu sztywnej kulki w powietrzu.

<b>Punktacja</b>	
Idea pomiaru parametrów toru strumienia wody przy pomocy serii fotografii	6 pkt.
Zastosowanie wzorów z modelu rzutu ukośnego	4 pkt.
Wykonie fotografii strumienia wody umożliwiających pomiar parametru toru	6 pkt.
Opracowanie danych i dyskusja wyników	4 pkt.