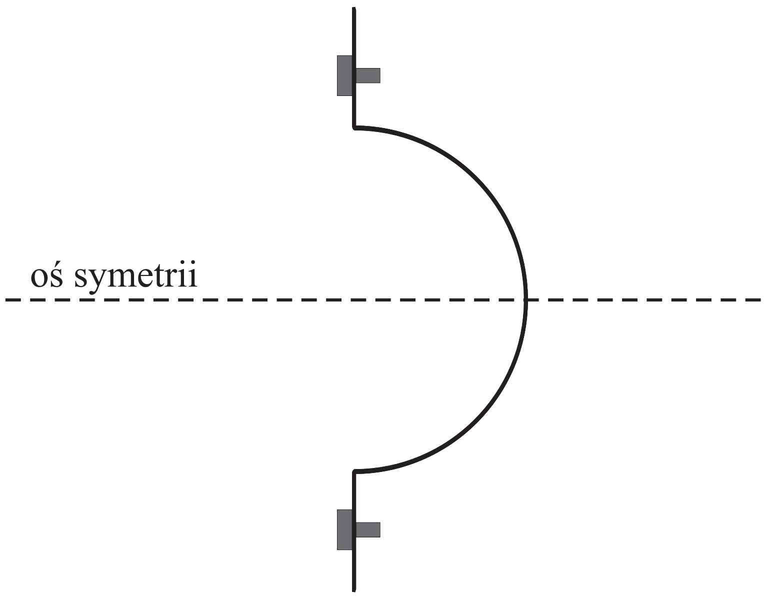
LVIII Olimpiada Fizyczna
Zawody III stopnia

Zadanie doświadczalne

Masz do dyspozycji:

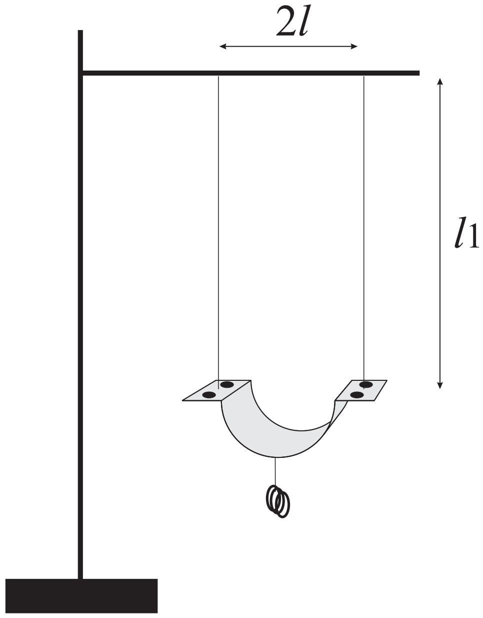
- badany element (kształtka ze śrubami),
- nitkę,
- papierową taśmę mierniczą,
- kilka podkładek stalowych o gęstości $\rho = 7800\ \mathrm{kg/m^3}$,
- statyw z poprzeczką,
- papier milimetrowy.

Wyznacz moment bezwładności badanego elementu względem jego osi symetrii.



Rozwiązanie

Pomysł rozwiązania opiera się na zbudowaniu wahadła torsyjnego z badanego elementu. Wykorzystując obecność śrub, można przyczepić do niego dwa kawałki nitki tak, aby przewleczone one zostały w dwóch punktach symetrycznie położonych względem osi pokazanej na rysunku w treści zadania. Taki sposób zamocowania nitki pozwala uzyskać drgania torsyjne kształtki względem jej osi symetrii w układzie z rysunku 1. Nitki przymocowujemy do poziomego pręta umieszczonego na statywie w



rysunek 1

takiej samej odległości, jaka dzieli punkty, w których przyczpione są one do kształtki (odległość tą oznaczamy przez $2l$ i mierzymy taśmą mierniczą lub papierem milimetrowym). Oczywiście dbamy o to, aby nitki miały tą samą długość oznaczoną przez l_1. Wówczas w stanie równowagi napięcie każdej z nich wynosi $N = mg/2$, gdzie m to masa badanego elementu. Przypuśćmy, że wychyliliśmy badany element z położenia równowagi obracając go wokół osi symetrii o niewielki kąt. Wówczas rozpocznie on drgania torsyjne. Obliczmy ich okres. Jeżeli kształtka obróciła się o kąt α względem osi symetrii, to nitki tworzą teraz z pionem kąt ϕ równy:

$$\phi = \alpha \frac{l}{l_1} \tag{1}$$

Ale moment sił jaki działa na kształtkę to $-2N\phi l$, który jest z drugiej strony równy $I\epsilon$, gdzie I to szukany moment bezwładności kształtki, a ϵ to jej przyśpieszenie kątowe. Stąd:

$$-mg\phi l = -mg\frac{l^2}{l_1}\alpha = I\epsilon \tag{2}$$

co jest równanie drgań harmonicznych o okresie:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Il_1}{mgl^2}} \tag{3}$$

Zauważmy, że w zestawie nie ma stopera, którego można by użyć do pomiaru okresu T. Należy więc zbudować wahadło matematyczne za pomocą nitki i jednej z podkładek oraz tak dobrać jego długość, aby czas jego okresu drgań był równy czasowi T. W praktyce długość wahadła daje się wyznaczyć z dokładnością do ok. 0,5 cm (obserwuje się, czy po kilku drganiach wahadło matematyczne wyprzedza torsyjne albo odwrotnie). Po uzyskaniu synchronizacji drgań obu wahadeł mierzymy długość wahadła matematycznego l_x. Mamy teraz:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_x}{g}} \tag{4}$$

Stąd łączac równości (3) z (4) dostajemy:

$$I = ml^2\frac{l_x}{l_1} \tag{5}$$

Nie znamy masy płytki m. Możemy jednak skorzystać z addytywności masy. Jeżeli do badanego elementu dołożymy podkładkę stalową o masie m_p to drgania będą miały inną częstość (mierzoną jako inna długość wahadła matematycznego). Aby uniknąć wpływu momentu bezwładności podkładki na badane drgania, kolejne podkładki podwieszamy pod badanym elementem na pojedynczej nitce. Podczas pomiaru kontrolujemy, czy rzeczywiście podkładki nie zaczynają drgań skrętnych. Po dołożeniu n jednakowych podkładek mamy zależność:

$$I = (m + nm_p)l^2\frac{l_x(n)}{l_1} \tag{6}$$

gdzie $l_x(n)$ to mierzona długość wahadła matematycznego w takiej sytuacji. Przekształcając tą równość dostajemy:

$$I - nm_p\frac{l^2 l_x(n)}{l_1} = ml^2\left[\frac{l_x(n)}{l_1}\right] \tag{7}$$

Uzyskaliśmy zatem postać:

$$I + A(n) = ml^2 B(n) \tag{8}$$

gdzie:

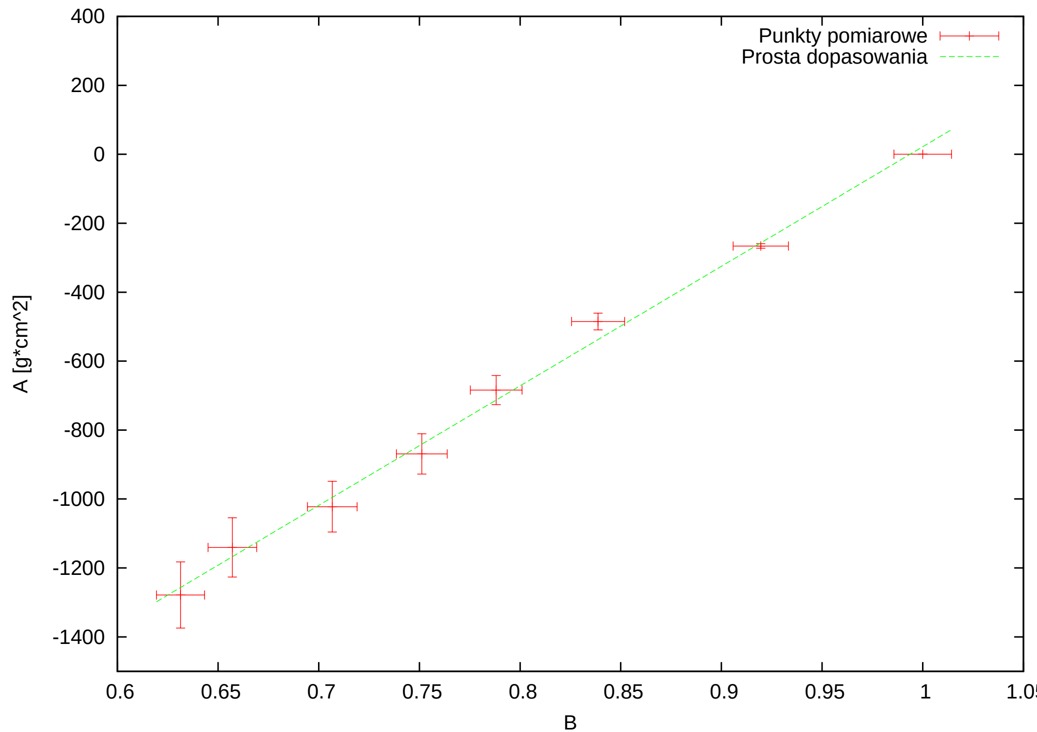
$$A(n) = -nm_p\frac{l^2 l_x(n)}{l_1} \qquad\qquad B(n) = \frac{l_x(n)}{l_1} \tag{9}$$

Wykonując wykres zależności $A(n)$ od $B(n)$ dla róznej liczby podkładek n powinniśmy otrzymać prostą, której punkt przecięcia z osią pionową będzie odpowiadał szukanemu momentowi bezwładności I.

Wielkość m_p wyznaczamy na podstawie wymiarów podkładki. Średnice mierzymy bezpośrednio kładąc podkładkę na papierze milimetrowym. Jej grubość wyznaczamy mierząc grubość stosu złożonego z kilku (np. dziesięciu) podkładek. Podkładki wykorzystane przez recenzenta miały postać płaskich pierścieni o grubości $g_p = (2,6 \pm 0,1)$ mm i średnicach $d_w = (15,5 \pm 0,5)$ mm oraz $d_z = (27,5 \pm 0,5)$ mm. Po przeliczeniu daje to

$$m_p = \rho\frac{\pi}{4}(d_z^2 - d_w^2)\cdot g_p = (8,2 \pm 0,6)\text{ g} \tag{10}$$

Wykonano pomiary dla długości $l_1 = (99 \pm 1)$ cm oraz $l = (4,2 \pm 0,05)$ cm. Po sporządzeniu wykresu zależńości $A(n)$ od $B(n)$ dostajemy dobrą zgodność danych z przewidywaniami teoretycznymi (rysunek 2).



rysunek 2

Wyznaczając punkt przecięcia prostje z osią pinową dostajemy moment bezwładności $I = (3400 \pm 300)\ \mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^2$. Jego niepewność szacujemy biorąc proste o skrajnych nachyleniach. Główny wpływ na ostateczny błąd ma niedokładność pomiaru masy podkładki. Bardzo istotne jest również starrane wykonanie eksperymentu (zadbanie o równą długość nici, na któych zamocowany jest badany element).