

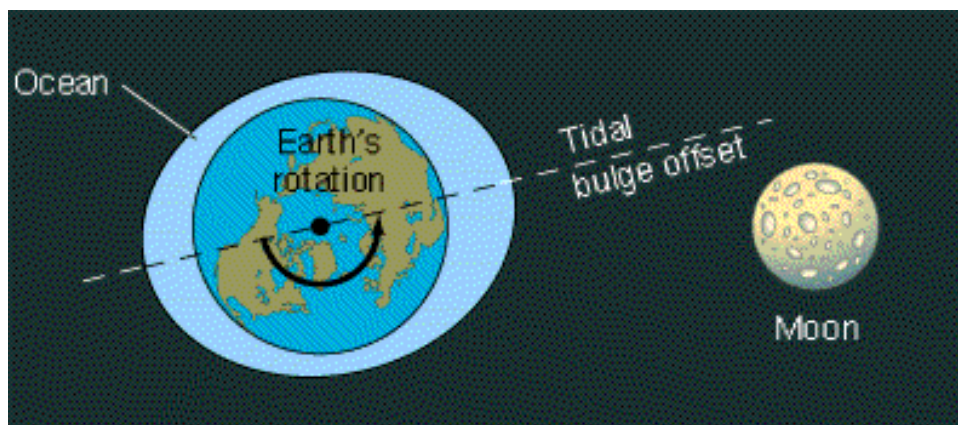
**ZADANIE TEORETYCZNE 1****EWOLUCJA UKŁADU ZIEMIA-KSIĘŻYC**

Naukowcy potrafią wyznaczyć odległość Ziemia-Księżyc z dużą dokładnością. Osiągają to odbijając wiązkę lasera od specjalnych luster pozostawionych na powierzchni Księżyca przez astronautów w roku 1969 i mierząc całkowity czas przelotu światła (patrz Rysunek 1).



Rysunek 1. Wiązka laserowa wysłana z obserwatorium jest użyta do dokładnego zmierzenia odległości między Ziemią a Księżycem.

Na podstawie tych obserwacji, bezpośrednio zmierzono, że Księżyc powoli oddala się od Ziemi. Czyli odległość Ziemia-Księżyc rośnie w czasie. Tak jest ponieważ z powodu momentów sił powodowanych przez pływy, Ziemia przekazuje Księżycowi moment pędu, patrz Rysunek 2. W tym zadaniu wyprowadzisz podstawowe parametry tego zagadnienia.



Rysunek 2. Grawitacja Księżyca powoduje deformacje pływowe lub „wybrzuszenia” na Ziemi. Z powodu obracania się Ziemi, prosta biegnąca przez wybrzuszenia nie biegnie wzdłuż prostej wyznaczonej przez środki Ziemi oraz Księżyca. To odchylenie powoduje moment siły, który przekazuje moment pędu związany z obracaniem się Ziemi ruchowi postępowemu Księżyca. Rysunek nie zachowuje skali.

### 1. Zachowanie momentu pędu.

Niech  $L_1$  będzie dzisiejszym całkowitym momentem pędu układu Ziemia-Księżyc. Zrób następujące założenia: i)  $L_1$  jest sumą tylko momentu pędu ruchu obrotowego Ziemi wokół swojej osi oraz ruchu postępowego Księżyca po jego orbicie wokół Ziemi. ii) Orbita Księżyca jest kołowa i Księżyc może być traktowany jako punkt. iii) Oś obrotu Ziemi i płaszczyzna, w której Księżyc obiega Ziemię, są do siebie prostopadłe. iv) Dla uproszczenia rachunków przyjmujemy, że ruch Księżyca zachodzi wokół środka Ziemi, a nie wokół środka masy układu. W całym tym zadaniu wszystkie momenty bezwładności, momenty sił oraz momenty pędu są zdefiniowane względem osi Ziemi. v) Pomiń wpływ Słońca.

1a	Napisz równanie na dzisiejszy całkowity moment pędu układu Ziemia-Słońce. Użyj następujących parametrów: moment bezwładności Ziemi $I_E$ , dzisiejsza częstotliwość kątową ruchu obrotowego Ziemi $\omega_{E1}$ , dzisiejszy moment bezwładności Księżyca $I_{M1}$ względem osi Ziemi oraz dzisiejsza częstotliwość kątową ruchu orbitalnego Księżyca $\omega_{M1}$ .	0.2
----	---	-----

Proces przekazywania momentu pędu zakończy się, gdy okres obrotu Ziemi i okres obiegu Księżyca wokół Ziemi będą miały taką samą wartość. W tym momencie wybrzuszenia pływowe wywoływane przez Księżyc na Ziemi będą znajdowały się na prostej wyznaczonej przez środki Ziemi oraz Księżyca i rozważany moment siły zniknie.

1b	Napisz równanie na końcowy moment pędu $L_2$ układu Ziemia-Księżyc. Zrób takie same założenia i przybliżenia jak w pytaniu 1a. Użyj następujących parametrów: moment bezwładności Ziemi $I_E$ , końcowa częstotliwość kątową ruchu obrotowego Ziemi i ruchu obiegowego Księżyca $\omega_2$ oraz końcowy moment bezwładności Księżyca $I_{M2}$ .	0.2
----	---	-----

1c	Zaniedbując wkład ruchu obrotowego Ziemi do końcowego całkowitego momentu pędu, napisz równanie, które wyraża zachowanie momentu pędu dla tego zagadnienia.	0.3
----	---	-----

## 2. Końcowa odległość i końcowa częstotliwość kątowna układu Ziemia – Księżyc

Załącz, że równanie grawitacyjne opisujące ruch po orbicie kołowej (Księżyc wokół Ziemi) jest spełnione w każdej chwili. Zaniedbaj wkład ruchu obrotowego Ziemi do końcowego całkowitego momentu pędu.

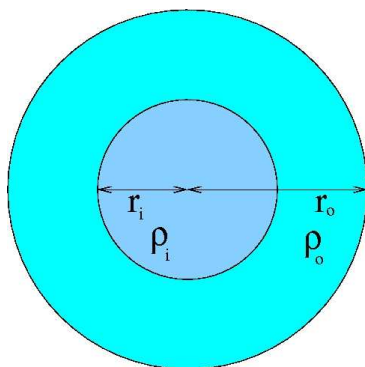
2a	Napisz równanie opisujące kołową orbitę Księżyc wokół Ziemi w stanie końcowym używając $M_E$ , $\omega_2$ , $G$ i końcowej odległości $D_2$ pomiędzy Ziemią i Księżycem. $M_E$ jest masą Ziemi a $G$ stałą grawitacyjną.	0.2
----	--	-----

2b	Napisz równanie na końcową odległość $D_2$ pomiędzy Ziemią i Księżycem używając znanych parametrów $L_1$ - całkowitego moment pędu układu, $M_E$ i $M_M$ - masy (odpowiednio) Ziemi i Księżyc, oraz $G$ .	0.5
----	---	-----

2c	Napisz równanie na końcową częstotliwość $\omega_2$ układu Ziemia – Księżyc używając znanych parametrów $L_1$ , $M_E$ , $M_M$ oraz $G$ .	0.5
----	--	-----

Poniżej będziesz miał znaleźć numeryczne wartości  $D_2$  and  $\omega_2$ . W tym celu musisz znać moment bezwładności Ziemi.

2d	Napisz równanie na moment bezwładności Ziemi $I_E$ zakładając, że Ziemia jest kulą. Gęstość części centralnej wynosi $\rho_i$ dla promienia zawartego między 0 a $r_i$ , a gęstość części zewnętrznej, czyli dla promienia od $r_i$ do $r_o$ , czyli powierzchni, wynosi $\rho_o$ (patrz rysunek 3).	0.5
----	--	-----



Rysunek 3. Ziemia jako kula z dwiema gęstościami  $\rho_i$  and  $\rho_o$ .

Wyznacz numeryczne wartości numeryczne wymagane w tym zadaniu z dokładnością do *dwóch cyfr znaczących*.

2e	Wyznacz moment bezwładności Ziemi $I_E$ używając wartości $\rho_i = 1.3 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$ , $r_i = 3.5 \times 10^6 \text{ m}$ , $\rho_o = 4.0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ , oraz $r_o = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ .	0.2
----	--	-----

Masy Ziemi i Księżyca wynoszą odpowiednio  $M_E = 6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$  i  $M_M = 7.3 \times 10^{22} \text{ kg}$ . Dzisiejsza odległość między Ziemią i Księżycem wynosi  $D_1 = 3.8 \times 10^8 \text{ m}$ . Dzisiejsza wartość częstości obrotu Ziemi wynosi  $\omega_{E1} = 7.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ . Dzisiejsza wartość częstości obiegu Księżyca wokół Ziemi wynosi  $\omega_{M1} = 2.7 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ , a stała grawitacyjna ma wartość  $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ .

2f	Wyznacz numeryczną wartość całkowitego momentu pędu układu $L_1$ .	0.2
----	--	-----

2g	Wyznacz końcową odległość $D_2$ w metrach oraz w stosunku do dzisiejszej wartości odległości $D_1$ .	0.3
----	--	-----

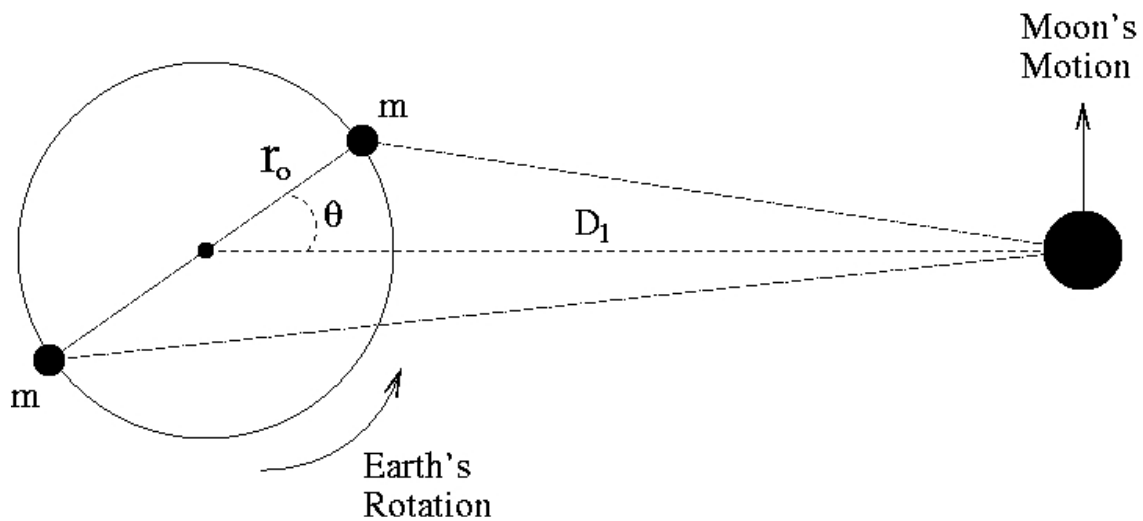
2h	Wyznacz końcową częstość kołową $\omega_2$ w $\text{s}^{-1}$ oraz końcową długość doby w stosunku do dzisiejszej wartości.	0.3
----	--	-----

Sprawdź, że założenie o pominięciu wkładu ziemskiej rotacji do całkowitego momentu pędu jest uzasadnione wyznaczając stosunek końcowego momentu pędu Ziemi i Księżyca. Ta wielkość powinna być mała.

2i	Wyznacz stosunek końcowego momentu pędu Ziemi i Księżyca.	0.2
----	---	-----

### 3. Jak bardzo Księżyc oddala się od Ziemi w ciągu roku?

Następnie wyznaczysz jak szybko Księżyc oddala się od Ziemi. Aby to uczynić musisz podać równanie na moment siły działający na Księżyc. Załóż, że wybrzuszenia mogą być przybliżone przez dwie masy, każda o wartości  $m$ , umieszczone na powierzchni Ziemi, patrz rys. 4. Oznaczmy przez  $\theta$  kąt pomiędzy linią łączącą wybrzuszenia i linią łączącą środki Ziemi i Księżyca.



Rysunek 4. Schemat do wyznaczenia momentu siły działającego na Księżyc ze strony wybrzuszeń na Ziemi. Nie jest zachowana skala.

3a	Wyznacz $F_c$ , wartość siły działającej na Księżyc przez bliższą punktową masę.	0.4
----	--	-----

3b	Wyznacz $F_c$ , wartość siły działającej na Księżyc przez dalszą punktową masę.	0.4
----	---	-----

Możesz teraz wyznaczyć momenty sił pochodzące od punktowych mas.

3c	Wyznacz wartość $\tau_c$ momentu siły pochodzącego od bliższej masy.	0.4
----	--	-----

3d	Wyznacz wartość $\tau_c$ momentu siły pochodzącego od dalszej masy.	0.4
----	---	-----

3e	Wyznacz wartość całkowitego momentu siły $\tau$ pochodzącego od obu mas. Ponieważ $r_o \ll D_1$ powinieneś przybliżyć swoje wyrażenie uwzględniając najniższy rząd rozwinięcia w $r_o / D_1$ . Możesz użyć zależności $(1 + x)^a \approx 1 + ax$ , dla $x \ll 1$ .	1.0
----	--	-----

3f	Wyznacz numeryczną wartość całkowitego momentu siły $\tau$ uwzględniając, że $\theta = 3^\circ$ i $m = 3.6 \times 10^{16}$ kg (zwróć uwagę, że ta masa jest rzędu $10^{-8}$ masy Ziemi). (note that this mass is of the order of $10^{-8}$ times the mass of the Earth).	0.5
----	--	-----

Ponieważ moment siły jest równy szybkości zmian momentu pędu wyznacz obecny (dzisiejszy) przyrost odległości Ziemia – Księżyc w ciągu roku. Wyznacz w tym celu moment pędu Księżyca tylko przez  $M_M$ ,  $M_E$ ,  $D_1$  oraz  $G$ .

3g	Wyznacz obecny przyrost odległości Ziemia – Księżyc w ciągu roku.	1.0
----	---	-----

Wyznacz na koniec zmianę długości doby na rok.

3h	Wyznacz dzisiejsze zmniejszenie częstości $\omega_{E1}$ w ciągu roku i dzisiejszą zmianę długości dnia w ciągu roku.	1.0
----	--	-----

#### 4. Gdzie ginie energia?

W przeciwieństwie do momentu pędu, który jest zachowany, całkowita (obrotowa plus grawitacyjna) energia nie jest zachowana. Przyjrzymy się temu zagadnieniu w tej ostatniej części.

4a	Napisz równanie na dzisiejszą całkowitą (obrotową plus grawitacyjną) energię układu Ziemia-Księżyc. Użyj wyłącznie parametrów $I_E$ , $\omega_{E1}$ , $M_M$ , $M_E$ , $D_1$ oraz $G$ .	0.4
----	--	-----

4b	Napisz równanie na $\Delta E$ – zmianę energii $E$ jako funkcji zmian $D_1$ oraz $\omega_{E1}$ . Używając wartości zmian $D_1$ oraz $\omega_{E1}$ wyznaczonych w pytaniach 3g i 3h, wyznacz numeryczną wartość $\Delta E$ na rok.	0.4
----	---	-----

Sprawdź, że ta strata energii jest zgodna z oszacowaniem, w którym energia pływów wytworzonych przez Księżyc na Ziemi jest rozpraszana na ciepło. Załóż, że pływy powodują średnio podniesienie o 0.5 m warstwy wody o głębokości  $h = 0.5$  m pokrywającej całą powierzchnię Ziemi (dla uproszczenia przyjmujemy, że woda pokrywa całą powierzchnię Ziemi). To zachodzi dwa razy dziennie. Następnie załóż, że z powodu lepkości, 10% z tej energii grawitacyjnej jest rozpraszane na ciepło gdy poziom woda się obniża. Przyjmij, że gęstość wody wynosi  $\rho_{water} = 10^3$  kg m<sup>-3</sup> oraz, że przyspieszenie ziemskie na powierzchni Ziemi wynosi  $g = 9.8$  m s<sup>-2</sup>.

4c	Jaka jest masa tej warstwy wody?	0.2
----	----------------------------------	-----

4d	Oblicz ile energii ulega rozproszeniu w ciągu roku? Porównaj tę wartość z obecnymi rocznymi stratami energii układu Ziemia-Księżyc.	0.3
----	---	-----