

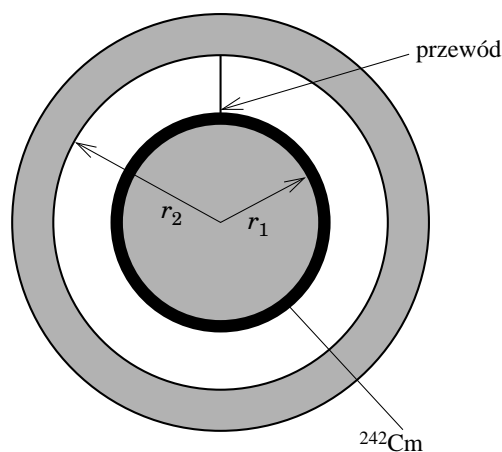
**Zadanie 1**

Metalowa kulka o promieniu  $r_1 = 10\text{ cm}$  jest otoczona, współśrodkową z nią, metalową, sferyczną powłoką o promieniu wewnętrznym  $r_2 = 2r_1$  (patrz rys. 1). Między powłoką a kulką panuje próżnia. Kulka jest pokryta cienką, równomierną warstwą izotopu kiuru  $^{242}\text{Cm}$  w ilości  $n = 0,01$  mola. Jądro  $^{242}\text{Cm}$  rozpada się wysyłając cząstkę alfa o energii  $E_0 \approx 6,1\text{ MeV}$ . Czas połowicznego zaniku kiuru wynosi  $t_{1/2} = 163$  dni. Powłoka jest połączona z kulką biegnącym radialnie cienkim przewodem. Przyjmujemy, że obecność przewodu i płynący w nim prąd nie wpływają na pole elektryczne między powłokami. Cząstki alfa są całkowicie pochłaniane przez powłokę oraz kulkę, ale nie są pochłaniane ani rozpraszane przez kiur.

- a) Jakie jest natężenie prądu płynącego w przewodzie, jeśli jego opór jest równy  $R_1 = 100\text{ k}\Omega$ ?  
 b) Jaki powinien być opór  $R_2$  przewodu, aby natężenie płynącego w nim prądu było równe połowie natężenia prądu określonego w pkt. a)?

Liczba Avogadro  $N_A \approx 6,0 \cdot 10^{23}\text{ mol}^{-1}$ , wartość ładunku elektronu  $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19}\text{ C}$ . Pomijamy emisję elektronów z kulki i otaczającej ją powłoki.

Rozważamy sytuację stacjonarną, tzn. po (przybliżonym) ustaleniu się natężenia prądu w przewodzie, przez czas mały w porównaniu z  $t_{1/2}$ .



rys. 1

**Zadanie 2**

Pręt o długości  $l$  i masie  $m$  położono na równi o kącie nachylenia  $\alpha$  (patrz rys. 2), na wysokości  $h$  nad podłogą (przy czym  $h \gg l$ ).

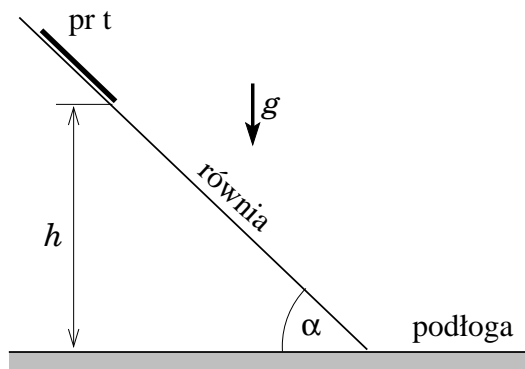
- a) Opisz jakościowo ruch pręta.  
 b) Wyznacz prędkość pręta w ostatniej fazie ruchu. Podaj wartość liczbową dla  $h = 6,4\text{ m}$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $g = 10\text{ m/s}^2$  (przyspieszenie ziemskie).

Tarcie i opór powietrza zanedbujemy. Pręt jest idealnie sztywny i cały czas znajduje się w płaszczyźnie pionowej prostopadłej do powierzchni równi. Podłoga i równia idealnie amortyzują uderzenia, tzn. powodują że tuż po uderzeniu prostopadła do nich składowa prędkości uderzanego punktu jest równa 0, a ich ugięcie w trakcie uderzenia jest znikomo małe.

Moment bezwładności pręta względem środka masy jest równy  $I = (1/12)ml^2$ . W chwili początkowej pręt spoczywał. Kąt nachylenia spełnia warunek  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ , przy czym  $\alpha$  nie jest bliskie  $90^\circ$ .

**Zadanie 3**

Pewien konstruktor zbudował skomplikowany silnik cieplny, którego czynnikiem roboczym jest  $n$  moli jednoatomowego gazu doskonałego (molowe ciepło właściwe równe  $(3/2)R$ ) pracującego w cyklu tworzącym na wykresie  $p - V$  trójkąt ABC o wierzchołkach w punktach  $(V_0, p_0)$ ,  $((3/2)V_0, (5/2)p_0)$ ,  $(3V_0, p_0)$  (patrz rys. 3). Gaz pobiera ciepło ze źródła ciepła o temperaturze

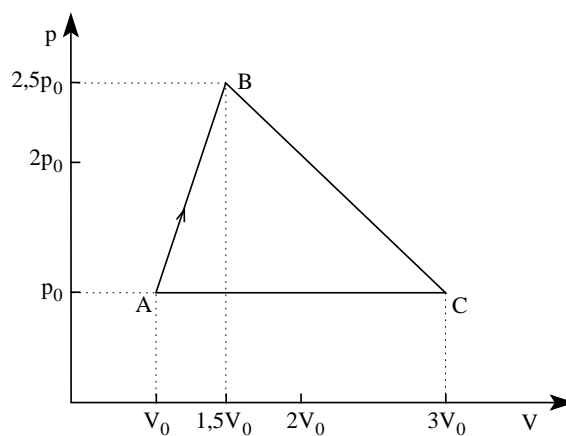


rys. 2

$T_1$  i oddaje je do chłodnicy o temperaturze  $T_2$ . Przyjmujemy, że gaz jest w każdym momencie cyklu w stanie równowagi termodynamicznej i pomijamy wszelkie opory mechanizmów.

a) Oblicz sprawność tego silnika.

b) Jakie warunki muszą spełniać temperatury  $T_1$  i  $T_2$  aby silnik pracował?



rys. 3

**Rozwiązane zadania 1**

Przyjmijmy, że różnica potencjałów elektrostatycznych między powłoką a kulką jest równa  $U$ . Jeśli  $v_{r1}$  i  $v_{\perp 1}$  są radialną i prostopadłą do radialnej składową prędkości  $v_1$  cząstki alfa w chwili rozpadu, a  $v_{r2}$  i  $v_{\perp 2}$  – analogicznymi składowymi prędkości w chwili, gdy cząstka dociera do powłoki, to z zasady zachowania energii

$$\frac{m}{2} (v_{r1}^2 + v_{\perp 1}^2) = \frac{m}{2} (v_{r2}^2 + v_{\perp 2}^2) + qU, \quad (1)$$

gdzie  $q = 2e$  jest ładunkiem cząstki alfa, a z zasady zachowania momentu pędu

$$mr_1 v_{\perp 1} = mr_2 v_{\perp 2}. \quad (2)$$

Ponieważ  $v_{r2}^2 \geq 0$ , do zewnętrznej powłoki dotrą tylko cząstki dla których

$$\frac{m}{2} (v_{r1}^2 + v_{\perp 1}^2) - \frac{m}{2} v_{\perp 2}^2 - qU = E_0 - \frac{m}{2} \left( \frac{r_1}{r_2} v_{\perp 1} \right)^2 - qU \geq 0, \quad (3)$$

gdzie wykorzystaliśmy  $\frac{m}{2} (v_{r1}^2 + v_{\perp 1}^2) = E_0$ , oraz zasadę zachowania momentu pędu. Zatem do zewnętrznej powłoki dotrą cząstki, których prędkość spełnia warunek

$$\frac{\frac{m}{2} v_{\perp 1}^2}{E_0} \leq \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 \cdot \left( 1 - \frac{qU}{E_0} \right). \quad (4)$$

Jeśli  $\theta$  jest kątem między kierunkiem prędkości (w chwili emisji) i kierunkiem radialnym, to powyższy warunek oznacza

$$\sin^2 \theta \leq \left( \frac{R}{r} \right)^2 \cdot \left( 1 - \frac{qU}{E_0} \right). \quad (5)$$

Zauważmy, że dla

$$\frac{qU}{E_0} \leq 1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}, \quad (6)$$

powyższy warunek nie daje żadnego ograniczenia na kąt  $\theta$ .

Cząstki alfa są emitowane losowo we wszystkich kierunkach; ilość cząstek wyemitowanych pod kątem nie większym niż  $\theta$  jest proporcjonalna do powierzchni sfery ograniczonej przez ten kąt, czyli do (dla sfery jednostkowej)

$$2\pi(1 - \cos \theta).$$

Zauważmy jednak, że cząstki emitowane pod kątem większym niż  $\frac{\pi}{2}$  są pochłaniane przez wewnętrzną powłokę, powinniśmy więc brać pod uwagę tylko cząstki wysyłane pod kątem  $\theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Zatem dla  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  natężenie prądu cząstek alfa dolatujących do zewnętrznej powłoki wynosi

$$I = I_0 \frac{2\pi(1 - \cos \theta)}{4\pi} = \frac{I_0}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot \left( 1 - \frac{qU}{E_0} \right)} \right), \quad (7)$$

gdzie  $I_0$  jest iloczynem  $q$  i ilości rozpadów kiuru w ciągu sekundy:

$$I_0 = q \left[ \frac{d}{dt} n N_A \left( 1 - 2^{-t/t_{1/2}} \right) \right]_{t=0} = q n N_A \frac{\ln 2}{t_{1/2}}. \quad (8)$$

Podsumowując

$$I = \begin{cases} \frac{I_0}{2} & \text{dla } \frac{qU}{E_0} \leq 1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}, \\ \frac{I_0}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot \left( 1 - \frac{qU}{E_0} \right)} \right) & \text{dla } 1 > \frac{qU}{E_0} > 1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \\ 0 & \text{dla } \frac{qU}{E_0} \geq 1. \end{cases} \quad (9)$$

Ponieważ  $t_{1/2} = 163 \cdot 24 \cdot 60^2 \text{s} \approx 1,4 \cdot 10^7 \text{s}$ , otrzymujemy  $I_0 \approx \frac{2^{0,01 \cdot 6,0 \cdot 10^{23} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,69}}{1,4 \cdot 10^7} \text{A} = 9,5 \cdot 10^{-5} \text{A}$ . Zauważmy, że  $I_0 \cdot R_1 < \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) \cdot E_0/q$ , zatem dla oporu  $R_1$  mamy do czynienia z pierwszym z powyższych przypadków, tzn. przez przewód płynie maksymalny prąd równy

$$I_{\max} = \frac{I_0}{2} \approx 4,8 \cdot 10^{-5} \text{A}. \quad (10)$$

Natężenie prądu będzie równe połowie powyższego natężenia gdy  $U$  będzie spełniało warunek

$$1 - \sqrt{1 - \frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot \left(1 - \frac{qU}{E_0}\right)} = \frac{1}{2}, \quad (11)$$

czyli dla

$$U = \left(1 - \frac{3r_1^2}{4r_2^2}\right) \frac{E_0}{q}. \quad (12)$$

Zatem  $R_2$  powinno być równe

$$R_2 = \frac{\left(1 - \frac{3r_1^2}{4r_2^2}\right) \frac{E_0}{q}}{I_0/4} \approx 1,0 \cdot 10^{11} \Omega. \quad (13)$$

### Punktacja

Wyznaczenie maksymalnego prądu mogącego płynąć w układzie (wzory (10) i (8)) – 2 pkt.

Wypisanie zasady zachowania energii (wzór (1)) i zasady zachowania momentu pędu (wzór (2)) – 1 pkt.

Otrzymanie warunku na kąt, pod jakim powinna być emitowana cząstka  $\alpha$  aby dotarła do powłoki (wzór (5)) – 2 pkt.

Zależność natężenia prądu od napięcia między powłoką a kulką (wzór (9)) – 2 pkt.

Uzasadnienie, że w przypadku a) natężenie prądu jest równe maksymalnej wartości – 1 pkt.

Wyznaczenie oporu  $R_2$  (wzór (13)) – 2 pkt.

## Rozwiązane zadania 2

Oznaczmy niższy (początkowo) koniec pręta literą  $A$ , a wyższy – literą  $B$ .

a) Ruch składa się z następujących etapów.

I. Zsuwanie się pręta wzdłuż równi aż do momentu uderzenia o podłogę. Z zasady zachowania energii wynika, że prędkość pręta tuż przed tym uderzeniem jest równa

$$v_1 = \sqrt{2gh}. \quad (1)$$

II. Uderzenie pręta. Na pręt w bardzo krótkim czasie działają bardzo duże siły pochodzące od podłogi i równi (siłę grawitacji można zaniedbać). Zgodnie z warunkami zadania na końcu tego etapu prędkość punktu  $A$  jest równoległa do podłogi, a prędkość punktu  $B$  jest równoległa do równi.

III. Ruch po uderzeniu pręta w podłogę, aż do ponownego uderzenia. Ponieważ  $h \gg l$ , zmiany prędkości w tym etapie spowodowane istnieniem grawitacji są małe, a zatem ruch można uważać za swobodny aż do chwili, gdy pojawi się znowu siła reakcji podłogi lub równi.

Ruch pręta na tym etapie jest złożeniem ruchu jednostajnego z pewną prędkością  $\vec{v}_{sm}$  (prędkością środka masy) i oraz jednostajnego obrotu wokół środka masy. Prędkości końców pręta są dane równaniami (patrz rys. 2a) )

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{sm} + \vec{v}_{obr}, \quad (2)$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{sm} - \vec{v}_{obr}, \quad (3)$$

gdzie  $\vec{v}_{obr}$  jest prędkością wynikającą z ruchu obrotowego względem środka masy, prostopadłą do pręta i stałą co do wartości.  $\vec{v}_{obr}$  obraca się wraz z obrotem pręta w kierunku (zgodnie z rysunkiem) przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, natomiast  $\vec{v}_{sm}$  pozostaje stałe (patrz rys. 2b)). Wynika z tego, że pionowa składowa prędkości (o znaku dodatnim w górę) punktu  $A$  rośnie co najmniej do momentu, gdy pręt obróci się o kąt  $2\alpha$ . A zatem aż do tego momentu punkt  $A$  na pewno nie uderzy w podłogę. Podobnie będzie rosła prostopadła do równi składowa prędkości (o znaku dodatnim w górę / w prawo) punktu  $B$ , a zatem punkt  $B$  co najmniej do momentu obrotu o kąt  $2\alpha$  nie uderzy w równię. Jednak ponieważ pionowa składowa  $\vec{v}_{sm}$  jest skierowana w dół, po obrocie pręta o kąt  $2\alpha$  punkt  $B$  znalazłby się poniżej podłogi (patrz rys. 2c)). Oznacza to, że w pewnym momencie, przed obróceniem się pręta o kąt  $2\alpha$ , punkt  $B$  musi uderzyć w podłogę.

Podsumowując: w III etapie pręt oderwie się od równi i podłogi, a ten etap zakończy się uderzeniem końca  $B$  pręta w podłogę.

IV. Uderzenie punktu  $B$  w podłogę. Bardzo krótko działają bardzo duże pionowe siły reakcji podłogi. Pod koniec tego etapu pionowa składowa prędkości punktu  $B$  jest równa 0.

V. Ponieważ jakościowa analiza nie daje odpowiedzi na pytanie, jaka jest pod koniec etapu IV prędkość punktu  $A$ , szczegółowa analiza dalszych faz ruchu jest niemożliwa.

Rozważmy jeszcze raz ruch po zderzeniu (po fazie II) przy pominięciu istnienia podłogi i równi. Zauważmy, że z równań (2, 3) oraz warunków początkowych na początku fazy III wynika, że prostopadłe do równi składowe prędkości punktów  $A$  i  $B$  nigdy nie mogą być mniejsze od zera, a zatem gdyby nie było zderzenia punktu  $B$  z podłogą, to żaden koniec pręta nie mógłby się zderzyć z równią. Zderzenie z podłogą wyhamowuje ruch obrotowy pręta i jednocześnie zwiększa prostopadłą do równi składową prędkości środka masy pręta, zatem zderzenie końców pręta z równią po etapie II nie może nastąpić.

Zatem w następnych fazach ruchu końce pręta będą ulegać wyhamowującym ruch pionowy i obrotowy zderzeniom z podłogą, aż do momentu, gdy pręt będzie leżał na podłodze poruszając się wzdłuż niej ze stałą prędkością. Ta prędkość będzie równa poziomej składowej prędkości środka masy pręta na zakończenie etapu II ponieważ po tym etapie działają tylko siły pionowe.

b) Z powyższej analizy wynika, że szukana prędkość to pozioma składowa prędkości środka masy pręta na zakończenie etapu II. Rozważmy zatem szczegółowo uderzenie pręta w podłogę.

Niech  $R_A$  oznacza siłę z jaką podłoga (w danej chwili zderzenia) działa na punkt  $A$ , a  $R_B$  – siłę z jaką równia działa na punkt  $B$ . Z II zasady dynamiki otrzymamy

$$a_{\perp} = \frac{R_A \cos \alpha + R_B}{m}, \quad a_{\parallel} = -\frac{R_A \sin \alpha}{m}, \quad (4)$$

gdzie  $a_{\parallel}$  i  $a_{\perp}$  oznacza odpowiednio równoległą i prostopadłą do pręta składową przyspieszenia środka masy pręta.

Z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego przyspieszenie kątowe pręta jest równe

$$\varepsilon = \frac{R_A \cos \alpha - R_B l}{I} \frac{l}{2}. \quad (5)$$

Z powyższych równań wynika, że zmiana prędkości środka masy pręta jest równa

$$\Delta v_{\perp} = \frac{T_A \cos \alpha + T_B}{m}, \quad \Delta v_{\parallel} = -\frac{T_A \sin \alpha}{m}, \quad (6)$$

gdzie  $T_A$  oraz  $T_B$  są popędami sił  $R_A$  oraz  $R_B$ .

Analogicznie prędkość kątowna pręta tuż po zderzeniu wynosi

$$\omega = \frac{T_A \cos \alpha - T_B l}{I} \frac{l}{2}. \quad (7)$$

Ponieważ po zderzeniu prędkość końca  $B$  pręta jest równoległa do równi, mamy

$$\Delta v_{\perp} - \omega \frac{l}{2} = 0. \quad (8)$$

Po zderzeniu prędkość końca  $A$  pręta jest równoległa do podłogi, tzn.

$$\Delta v_{\perp} + \omega \frac{l}{2} = (v_1 + \Delta v_{\parallel}) \operatorname{tg} \alpha. \quad (9)$$

Z równań (6), (7), (8), (9) możemy wyznaczyć niewiadome  $\Delta v_{\perp}$ ,  $\Delta v_{\parallel}$ ,  $\omega$ ,  $T_A$ ,  $T_B$ . Styczna oraz prostopadła do pręta składowa prędkości środka masy oraz prędkość kątowna obrotu pręta będą równe

$$v_{sm\parallel} = v_1 + \Delta v_{\parallel} = \frac{1}{\frac{1}{4} \left(1 + \frac{4I}{ml^2}\right) \operatorname{tg}^2 \alpha + 1} v_1, \quad (10)$$

$$v_{sm\perp} = \Delta v_{\perp} = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\frac{1}{4} \left(1 + \frac{4I}{ml^2}\right) \operatorname{tg}^2 \alpha + 1} v_1, \quad (11)$$

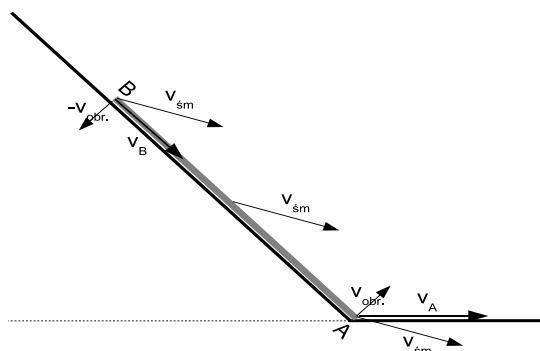
$$\omega = \frac{1}{l} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\frac{1}{4} \left(1 + \frac{4I}{ml^2}\right) \operatorname{tg}^2 \alpha + 1} v_1. \quad (12)$$

Zatem końcowa prędkość pręta, równa poziomej składowej prędkości jego środka masy po zakończeniu etapu II, wynosi

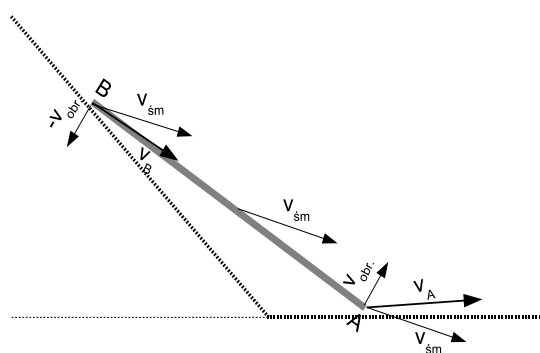
$$\begin{aligned} v_{\text{końcowe}} &= v_{sm\parallel} \cos \alpha + v_{sm\perp} \sin \alpha = \\ &= \frac{1 + \cos^2 \alpha}{2 \cos \alpha} \frac{1}{\frac{1}{4} \left(1 + \frac{4I}{ml^2}\right) \operatorname{tg}^2 \alpha + 1} v_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Dla  $\alpha = 45^\circ$ ,  $I = \frac{1}{12} ml^2$  otrzymamy:

$$v_{\text{końcowe}} = \frac{9\sqrt{2}}{16} v_1 = \frac{9}{8} \sqrt{gh} = 9 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (14)$$



Rys. 2. a)



Rys. 2. b)

Punktacja:

a)

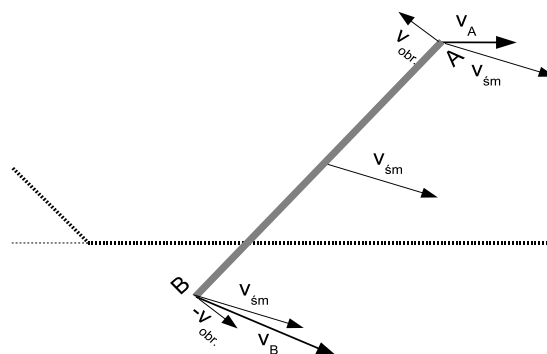
Zauważenie i uzasadnienie, że po pierwszym uderzeniu w podłogę pręt odrywa się od podłogi i od równi, a następnie uderza końcem  $B$  w podłogę oraz zauważenie, że pozostałe fazy ruchu nie zmieniają poziomej składowej prędkości – 3 pkt.

b)

Napisanie II zasady dynamiki dla ruchu środka masy oraz ruchu obrotowego w trakcie zderzenia (równ. (4) i (5) lub równoważne) – 1 pkt.

Wypisanie układu równań pozwalającego na wyznaczenie prędkości środka masy i prędkości katowej po I zderzeniu (równania (6), (7), (8), (9) lub równoważne) – 3 pkt.

Wyznaczenie prędkości końcowej pręta (wzór (13) wraz z wyznaczeniem wartości liczbowej (wzór (14)) – 3 pkt.



Rys. 2. c)

**Rozwiązane zadania 3**

Aby obliczyć sprawność tego cyklu, należy policzyć pracę wykonaną przez układ  $\bar{W}_{\text{wyk}}$  oraz ciepło dostarczone do układu  $Q_{\text{dost}}$ .

Dla tłoka o powierzchni  $S$  i przesuwanego się o odległość  $dL$ , praca wykonana przez gaz  $\bar{W}_{el} = FdL = pSdL = pdV$ , gdzie  $dV$  jest zmianą objętości gazy w tym procesie, a  $p$  — ciśnieniem gazu. Całkowita praca jest równa sumie wszystkich takich elementów, co oznacza że jest on polem powierzchni ograniczonej przez linie definiujące cykl na wykresie  $p - V$ . W naszym przypadku oznacza to, że

$$W_{\text{wyk}} = \frac{1}{2}2V_0 \cdot \frac{3}{2}p_0 = \frac{3}{2}V_0 \cdot p_0. \quad (1)$$

Z I zasady termodynamiki wynika, że ciepło  $Q_{el}$  dostarczone do układu (tutaj może być ujemne) w przemianie infitezymalnej spełnia równanie  $dU = Q_{el} - \bar{W}_{el}$ , gdzie  $dU$  jest zmianą energii wewnętrznej w tym procesie. Stąd  $Q_{el} = dU + \bar{W}_{el}$ . Wszystkie rozważane w cyklu procesy spełniają związek  $p = \alpha V + \beta$ , gdzie współczynniki  $\alpha$ ,  $\beta$  są różne w różnych etapach cyklu. Uwzględniając, że energia wewnętrzna gazu doskonałego o molowym cieple właściwym  $c_V = \frac{3}{2}R$  jest równa  $U = \frac{3}{2}nRT$  oraz równanie stanu gazu doskonałego (równanie Clapeyrona)  $pV = nRT$  dostajemy

$$\begin{aligned} Q_{el} &= dU + \bar{W}_{el} = d\left(\frac{3}{2}nRT\right) + pdV = \frac{3}{2}d(pV) + pdV = \frac{3}{2}d[(\alpha V + \beta)V] + (\alpha V + \beta)dV = \\ &= (4\alpha V + \frac{5}{2}\beta)dV. \end{aligned} \quad (2)$$

Aby ciepło było rzeczywiście dostarczone, powyższa wielkość musi być dodatnia. Rozważymy ten problem po kolei na poszczególnych fragmentach cyklu.

Odcinek AB:

$\alpha = 3\frac{p_0}{V_0}$ ,  $\beta = -2V_0$ ,  $dV > 0$ , a zatem  $Q_{el} > 0$  na całym tym odcinku.

Całkowne ciepło  $Q_{AB\text{dost}}$  dostarczone na tym odcinku możemy wyznaczyć z I zasady termodynamiki

$$\begin{aligned} Q_{AB\text{dost}} &= \Delta U + \bar{W}_{AB} = \frac{3}{2}\Delta(pV) + (\text{pole pod odcinkiem AB}) = \\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{5}{2}p_0\right)\left(\frac{3}{2}V_0\right) - \frac{3}{2}p_0V_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}p_0 + p_0\right)\frac{1}{2}V_0 = 5p_0V_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Odcinek BC:

$\alpha = -\frac{p_0}{V_0}$ ,  $\beta = 4p_0$ ,  $dV > 0$ , a zatem  $Q_{el} > 0$  gdy  $4\alpha V + \frac{5}{2}\beta = -4\frac{p_0}{V_0}V + \frac{5}{2}4p_0 > 0$ , czyli gdy  $V < \frac{5}{2}V_0$ . Oznaczając literą D punkt odpowiadający (na odcinku BC) objętości  $\frac{5}{2}V_0$  (i ciśnieniu  $\frac{3}{2}p_0$ ) dochodzimy do wniosku, że ciepło jest dostarczane tylko na odcinku BD. Zatem

$$\begin{aligned} Q_{BC\text{dost}} &= Q_{BD\text{dost}} = \Delta U + \bar{W}_{BD} = \frac{3}{2}\Delta(pV) + (\text{pole pod odcinkiem BD}) = \\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}p_0\right)\left(\frac{5}{2}V_0\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{5}{2}p_0\right)\left(\frac{3}{2}V_0\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}p_0 + \frac{3}{2}p_0\right)V_0 = 2p_0V_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Odcinek CA:

$\alpha = 0$ ,  $\beta = p_0$ ,  $dV < 0$ , a zatem  $Q_{el} < 0$  na całym odcinku CA, czyli ciepło nie jest na tym odcinku dostarczane

$$Q_{CA\text{dost}} = 0.$$

Czyli całkowite ciepło dostarczone w czasie jednego cyklu jest równe

$$Q_{\text{dost}} = Q_{AB\text{dost}} + Q_{BC\text{dost}} + Q_{CA\text{dost}} = 7p_0V_0 \quad (5)$$

Zatem sprawność cyklu

$$\eta = \frac{\bar{W}_{\text{wyk}}}{Q_{\text{dost}}} = \frac{3}{14} \quad (6)$$



Temperatura źródła ciepła powinna być nie niższa niż temperatura gazu w dowolnym stanie w trakcie dostarczania ciepła, natomiast temperatura chłodnicy powinna być nie wyższa niż temperatura gazu w dowolnym stanie w trakcie oddawania ciepła. Zgodnie z poprzednimi rozważaniami

$$T = \frac{pV}{nR} = \frac{(\alpha V + \beta)V}{nR}$$

### Temperatura maksymalna

Na odcinku AB:

$T = \frac{(3\frac{p_0}{V_0}V - 2V_0)V}{nR}$ . Ponieważ jest to funkcja kwadratowa  $V$  o dodatnim współczynniku przy  $V^2$ , maksimum jest tu osiągnięte na jednym z końców przedziału. Łatwo sprawdzić, że zachodzi to dla  $V = \frac{3}{2}V_0$  i że  $T_{\max AB} = \frac{15}{4} \frac{p_0 V_0}{nR}$ .

Na odcinku BD:

$T = \frac{(-\frac{p_0}{V_0}V + 4p_0)V}{nR}$ . Pierwszym kandydatem na maksimum jest maksimum tej funkcji kwadratowej występujące w punkcie  $V = 2V_0$ . Ponieważ ten punkt należy do rozważanego odcinka, otrzymujemy  $T_{\max BD} = \frac{(-\frac{p_0}{V_0}2V_0 + 4p_0)(2V_0)}{nR} = 4 \frac{p_0 V_0}{nR} > T_{\max AB}$ .

### Temperatura minimalna.

Na odcinku DC:

$T = \frac{(-\frac{p_0}{V_0}V + 4p_0)V}{nR}$ . Ta funkcja jest rosnąca od  $-\infty$  do  $2V_0$  i malejąca od  $2V_0$  do  $\infty$ . Ponieważ odcinek DC leży w tym drugim przedziale, minimum jest osiągnięte na jego końcu i wynosi  $T_{\min DC} = \frac{p_0(3V_0)}{nR} = 3 \frac{p_0 V_0}{nR}$ .

Na odcinku CA:

$T = \frac{p_0 V}{nR}$ , stąd  $T_{\min CA} = \frac{p_0 V_0}{nR} < T_{\min DC}$ .

### Odpowiedź:

Sprawność cyklu wynosi  $\eta = \frac{3}{14}$ .

Temperatura źródła ciepła musi spełniać warunek  $T_1 \geq 4 \frac{p_0 V_0}{nR}$ .

Temperatura chłodnicy musi spełniać warunek  $T_2 \leq \frac{p_0 V_0}{nR}$ .

### Punktacja

Wyznaczenie pracy wykonanej przez gaz w trakcie jednego cyklu (wzór (1)) – 1 pkt.

Wyznaczenie na jakim fragmencie cyklu ciepło jest pobierane przez gaz (na odcinkach AB, BD, gdzie  $D = (\frac{5}{2}V_0, \frac{3}{2}p_0)$ ) – 2 pkt.

Wyznaczenie ciepła dostarczonego do gazu na odcinku AB (wzór (3)) – 1 pkt.

Wyznaczenie ciepła dostarczonego do gazu na odcinku BC (wzór (4)) – 2 pkt.

Wyznaczenie sprawności cyklu (wzór (6)) – 1 pkt.

Wyznaczenie minimalnej temperatury źródła ciepła ( $4 \frac{p_0 V_0}{nR}$ ) – 2 pkt.

Wyznaczenie maksymalnej temperatury chłodnicy ( $\frac{p_0 V_0}{nR}$ ) – 1 pkt.